2011

EDUCACION PARA ADULTOS MATEMATICA PRIMER CICLO

PATRICIA NOGUEIRAS – OSCAR ROMERO

CENS N° 7

CIUDAD AUTONOMA DE BUENOS AIRES

"Si he hecho descubrimientos invaluables ha sido más por tener paciencia que a cualquier otro talento."
Isaac Newton

MATEMÁTICA

PRIMER CICLO

CENS Nº 7

Patricia Nogueiras

Oscar Romero

INDICE

5 GEOMETRÍA

* Circunferencia y círculo. Construcciones. Identificación de centro y radio.

* Clasificación y construcción de ángulos.

* Clasificación de triángulos según sus lados y sus ángulos.

* Construcción de triángulos conociendo dos y tres elementos.

6 GRÁFICOS CARTESIANOS Y FUNCIÓN LINEAL

* Ubicación de pares ordenados en el sistema de ejes cartesianos.

* Representación de situaciones contextualizadas.

* Identificación de variables.

* Lectura de los gráficos.

* Función lineal, su representación a través de tabla de valores.

UNIDAD 1: NÚMEROS NATURALES

Los números naturales surgieron de la necesidad que tuvo el hombre de contar. El primer elemento del conjunto de los números naturales es el número 1, no hay un último elemento, por lo tanto, es un conjunto infinito.

Operaciones básicas: SUMA, RESTA. MULTIPLICACIÓN Y DIVISIÓN

Para resolver ejercicios combinados hay que tener en cuenta:

1º) Separar en términos (los signos + y – separan en términos)

2º) Resolver los paréntesis

3º) Resolver las operaciones de cada término

4º) Por último resolver las sumas y restas de izquierda a derecha

La división entre números (10 + 2) : 3

Se puede escribir $\frac{10+2}{3}$

ACTIVIDADES:

Resolver los siguientes ejercicios combinados:

a) 5 . 2 - 4 : 2 + 9 . 8 =

b) 12 : 2 + 1 + 100 : 20 =

c) 18 – 2 – 3 + 7 . 4 =

d) 2 . 6 : 2 – 3 . 0 + 15 =

e) 3 . (2 + 3 . 4) – 25 : (1 + 4) =

f) 4 + 5 . (2 + 4) – 3 . (4 – 1) =

g) 16 : (4 – 2) + 7 : 7 =

h) 5 . (1 + 2 . 3) – 10 : (3 + 2) =

i) $9 \,.\, (64 - 20) + \frac{39+25}{8} =$

j) $\frac{600}{10} - 3 \,.\, 8 + 12 \,.\, 9 =$

k) $510 - 27 \,.\, 3 + \frac{54}{9} =$

l) $\frac{24}{8} \,.\, 5 - 12 + 7 =$

PROPIEDADES DE LAS OPERACIONES CON NÚMEROS NATURALES

SUMA

Conmutativa: 8 + 9 = 9 + 8

Asociativa: 3 + (1 + 2) = (3 + 1) + 2

MULTIPLICACIÓN

Conmutativa: 2 . 3 = 3 . 2

Asociativa: (4 . 5) . 6 = 4 . (5 . 6)

Distributiva con respecto a la suma y la resta:

a) 3 . (2 + 5) = 3 . 2 + 3 . 5
b) (1 + 9) . 4 = 1 . 4 + 9 . 4
c) 5 . (8 - 3) = 5 . 8 – 5 . 3
d) (7 – 2) . 9 = 7 . 9 – 2 . 9

ACTIVIDADES:

1) Resolver aplicando propiedad distributiva:

a) 2 . (7 – 5) =
b) 3 . (9 - 6) =
c) (2 + 1 + 7) . 4 =

d) 10 . (8 - 5) =
d) (10 -2) . 7 =
e) (4 -1) . 5 =

g) 8 . (20 – 8 -2) =
f) H) 9 . (11 - 7) =
g) I) (7 – 3 -2) . 6

2) Resolver los siguientes ejercicios aplicando propiedad distributiva cuando sea posible:

a. 5 · (9 - 6) - (2 · 5 - 4) =
b. (5 - 3)·(2 · 3 - 4) + 8 =
c. (18 – 4) : 7 + 9 – 3 · 2 =
d. 10 · 3 + (16 - 2 · 3) : 5 =
e. (8 - 2) : 3 + 2 · (5 - 3) =
f. (54 : 6 + 7) : 8 + 2 · 5 =
g. 5 + 2 · (12 - 2 · 3) + 12 =
h. (12 : 4 + 2) · (2 + 3) - 6 =
i. 3 + 3 · 2 + (6 · 2 - 8) : 4 =
j. 3 · 2 + (3 · 4 + 4) : 8 - 2 =
k. [3 + (6 · 5 - 3 · 7)] : 6 + 8 : 4 + 6 =
l. 20 - [3 + 3 · 2 + (6 · 2 - 8) : 4] =
m. 10 · 3 - 4 · 5 + (16 - 2 · 3) : 5 =
n. [(12 - 4) : 4 + 3 · 4] : 7 - 1 =
o. [4 + 5 · (4 - 2)] : 7 + 3 · (2 + 2 · 3) =
p. [2 + (3 · 4 + 4) : 8] - [7 - 2 · (9 - 6)] =
q. [(7 - 5) · (5 - 3) + 10] : 7 + 8 =
r. (3 · 5 + 5 · 8) : [23 - 3 · (12 - 2 · 3)] =
s. 17 - [12 - 45 : (6 · 2 + 3)] =
t. [5 + (3 · 4 - 6)]· 3 - 3 ·9 =
u. 32 - 4 · 7 + 2 · (1 + 3) =
v. 50 - 4 · (5 · 5 - 3 · 5) + 2 · 4 =
w. 25 + 3 · (1 + 2) - (10 - 3 · 2) · 3 =
x. (8 + 5 · 4) : 7 + 3 · [35 - (2 + 2 · 3)] =
y. 72 : (4 + 3) + 14 + 4 : 2 =

3) Completar la siguiente tabla con los números que faltan:

A	B	A + b	3 . B - a	A . B – (a + b)
5		11		
	15		30	
9	12			
8			19	
	4	10		
7			17	

POTENCIACIÓN

La potenciación es el producto de dos o más números iguales

EXPONENTE

$$5^3 = 5 \,.\, 5 \,.\, 5 = 125$$

BASE

El exponente indica cuantas veces se debe multiplicar la base

<u>Para tener en cuenta</u>

- ✓ Toda potencia de base 10 es igual a la unidad seguida de tantos ceros como indique el exponente.

$$10^5 = 10 \,.\, 10 \,.\, 10 \,.\, 10.\, 10 = 100.000$$

- ✓ Toda potencia de base 1 es igual a 1.

$$1^n = 1$$

- ✓ Todo número elevado a la cero es igual a 1.

$$n^0 = 1$$

- ✓ Todo número elevado a la 1 da como resultado el mismo número.

$$n^1 = \mathrm{n}$$

ACTIVIDADES:

1) Escribir en forma de potencia:

a) 3 . 3 . 3 . 3 =

b) 5 . 5 . 5 =

c) 6 . 6 =

d) 9 . 9 . 9. 9 . 9 . 9 =

2) Expresar los siguientes números como potencias de 10:

a) 10.000 =

b) 10.000.000 =

c) 10 =

d) 1 =

e) 1.000.000 =

f) 100.000.000 =

3) Resolver las siguientes potencias:

2^3 =

7^3 =

3^5 =

8^2 =

4^2 =

2^5 =

5^3 =

9^2 =

124^0 =

15^0 =

2^1 =

1^{99} =

1^5 =

25^1 =

RADICACIÓN:

RAÍZ CUADRADA:

La raíz cuadrada de un número es otro número que elevado al cuadrado da como resultado el número dado.

$$\sqrt{64} = 8 \text{ porque } 8^2 = 64$$

RAÍZ CÚBICA:

La raíz cúbica de un número es otro número que elevado al cubo da como resultado el número dado.

$$\sqrt[3]{27} = 3 \text{ porque } 3^3 = 27$$

RAÍZ ENÉSIMA

De la misma manera se calculan las raíces con cualquier índice:

$$\sqrt[5]{32} = 2 \text{ porque } 2^5 = 32$$

$$\sqrt[4]{81} = 3 \text{ porque } 3^4 = 81$$

ACTIVIDADES:

1) Calcular las siguientes raíces:

a) $\sqrt{4}$ =
b) $\sqrt{9}$ =
c) $\sqrt{16}$ =
d) $\sqrt[3]{27}$ =
e) $\sqrt[3]{125}$ =
f) $\sqrt[3]{8}$ =
g) $\sqrt[3]{1.000}$ =
h) $\sqrt{121}$ =
i) $\sqrt[3]{64}$ =
j) $\sqrt[5]{1}$ =

2) Resolver los siguientes ejercicios combinados:

a) $\sqrt{64} + (2 + 3)^2 - \sqrt{16} - (9 + 23)^0 =$

b) $\sqrt{100} - 64 + 3 . 2^2 + (3 - 1)^3 =$

c) $4^2 + 3^2 - 9 . 2 : 6 + 1^3 =$

d) $3 . 3^2 - 5 . (1 + 3) + 5^3 - 10^2 =$

e) $\sqrt{4} . 10 + 9 + \sqrt[3]{4 + 4} - \frac{12}{3} + 10 : 5 . 3 =$

f) $\sqrt{8^2 + 6^2} + 11^2 - 140 : 7 + \sqrt[5]{32} =$

g) $\sqrt[4]{16} + 3 . (7 - 4) + (4^2 + 2) : 9 =$

h) $\sqrt{100} + 3 . 2 + 3^2 - 5^2 =$

i) $2^3 - \sqrt{4} + 10 : 2 + \sqrt[3]{27} =$

j) $5 . 4 + 3 . 7 - 4^3 : 4^2 =$

k) $9^2 - 3^2 + 7 . 4 : 2 - 5^2 . 2 =$

l) $(7 + 5 . 3) : 2 + 3^0 + 3^1 - 1^4 =$

m) $(1 + 2)^3 - (8 . 2 - 2 . 3) - 2 . 7 =$

n) $\frac{36}{9} + (3 + 8 - 2)^2 - 5^2 =$

o) $\sqrt[3]{64^3} + \sqrt{36} + 3 . (10^2 - 9^2) - 13 . \sqrt{4} =$

p) $\frac{\sqrt{100}}{2} + \sqrt[3]{6^2 - 3^2} - 12 : 3 =$

q) $(16 - 900 : 100)^2 - \sqrt[4]{16} - 9^1 + 9^0 =$

r) $6^2 - 5^2 + 2 . \sqrt{11 .2 - 13} - 2^3 =$

s) $\sqrt{25} + 4 . (16 - 2^2) - (18 - 3^2) : 9 =$

t) $\sqrt[3]{125} + 2^5 : 8 + (10 - 2^2)^2 - 8 . 5 : 20 =$

u) $\frac{16-8}{4} + \frac{3+6}{9} - 5 . 6 : 15 + \sqrt{100 - 19} =$

PROPIEDADES DE LA POTENCIACIÓN

PRODUCTO DE POTENCIAS DE IGUAL BASE

$$3^2 \,.\, 3^4 = (3\,.\,3)\,.\,(3\,.\,3\,.\,\;3\,.\,3) = 3^6$$

$$3^2\,.3^4 = 3^{2+4} = 3^6$$

Cuando se multiplican potencias de igual base se obtiene otra potencia que tiene la misma base y su exponente es la suma de los exponentes de los factores.

DIVISIÓN DE POTENCIAS DE IGUAL BASE

$$2^8 : 2^5 = \frac{2^8}{2^5} = \frac{\cancel{2\,.2\,.2\,.2\,.2}\,.2\,.2\,.2}{\cancel{2\,.2\,.2\,.2.2}} = 2^{8-5} = 2^3$$

Cuando se dividen potencias de igual base se obtiene otra potencia de igual base y su exponente es la resta de los exponentes originales.

POTENCIA DE POTENCIA

$$(4^2)^5 = 4^2\,.\,4^2\,.\,4^2\,.\,4^2\,.\,4^2 = 4^{2+2+2+2+2} = 4^{10}$$

$$(4^2)^5 = 4^{2\,.\,5} = 4^{10}$$

Cuando se calcula la potencia de otra potencia, el resultado es una potencia con la misma base y el exponente es el producto de los exponentes originales.

ACTIVIDADES:

1) Resolver aplicando propiedades de la potenciación:

a) $2^2 \,.\, 2 =$
b) $3^5 : 3^3 =$
c) $4^6 : 4^2 =$
d) $10^5 \,.\, 10 =$
e) $(6\,.\,6^5) : 6^3 =$
f) $(4^2)^3 =$
g) $(3^3)^2 : 3^4 =$
h) $7^4 \,.\, 7^5 : 7^7 =$
i) $6^2 \,.\, 6^0 =$
j) $(2^4 \,.\, 2^3) : 2^8 =$
k) $(2^3)^0 =$
l) $X \,.\, X =$

m) $X^2 \,.\, X^3 =$
n) $X^5 : X^3 \,.\, X =$
o) $X^{10} : X^2 : X^5 =$
p) $(X^5)^2 \,.\, X^2 =$
q) $(X^3)^3 : X^9 =$
r) $X \,.\, (X^2)^6 =$
s) $(X \,.\, X^5)^4 =$
t) $(Y^3 : Y^2 \,.\, Y^2)^3 =$
u) $(X^2 \,.\, X^3)^2 =$
v) $\frac{3^5}{3^3} =$

w) $\frac{5^{10}}{5^8} \,.\, 5^2 =$
x) $\frac{10^6}{10^2} : 10^4 =$
y) $\frac{X^2}{X^0} =$
z) $\left(\frac{2^{12}}{2^8}\right)^3 =$

PROPIEDAD DISTRIBUTIVA DE LA POTENCIACIÓN

$$\left.\begin{array}{l} * \ (2\,.\,5)^2 = 10^2 = 100 \\ * \ (2\,.\,5)^2 = 2^2\,.\,5^2 = 4\,.\,25 = 100 \end{array}\right\} \text{Los resultados son iguales}$$

$$\left.\begin{array}{l} * \ (10 : 5)^3 = 2^3 = 8 \\ * \ (10 : 5)^3 = 10^3 : 5^3 = 1.000 : 125 = 8 \end{array}\right\} \text{los resultados son iguales}$$

La potenciación es distributiva con respecto a la multiplicación y a la división

ACTIVIDADES:

1) Resolver aplicando propiedades de la potenciación:

a) $(10 : 5)^2 =$
b) $(2 . 3)^3 =$
c) $(8 : 2)^2 =$
d) $(2 .X)^3 =$
e) $(3 . X^2)^3 =$
f) $(X : 2)^4 =$
g) $(3 . X . X^5)^4 =$
h) $(X . Y)^3 =$
i) $(Y^3 : Y^2 . X^2)^3 =$
j) $(3^2 . X^3)^2 =$
k) $(X^3 . 2^2)^2 =$
l) $(Y^3 : Y)^2 =$

2) Resolver los siguientes ejercicios combinados aplicando propiedades:

a) $2 . (8 - 3) + (3^2)^2 - \sqrt{4^2} + (3 + 2)^2 =$

b) $(7 + 2) . 9 – 4 . 4^2 + 2^2 . 2^5 : 2^4 =$

c) $(5^5)^2 : (5^2)^4 - \sqrt{2^2 . 4} + 10 : (3 - 1) =$

d) $3^2 . (5 -2) + \sqrt[3]{10 - 2} + \sqrt{2^3 - 4} =$

e) $\frac{12}{6} + 3 . (10 - 7) + 1^0 + \sqrt{49} =$

f) $\frac{10 + 2^2}{2} + 2^2 + (20 - 5) . 8 - \sqrt{6^2} + \sqrt[3]{4^2 + 11} =$

g) $10 . (10 - 7) + (12 – 4 - 7) . 3 – 3^5 . 3^2 : 3^4 + (2^3)^2 =$

ECUACIONES

Una ecuación es una igualdad con letras y números

Para resolverla hay que hallar el valor numérico que toma la incógnita para convertir esta igualdad en una igualdad numérica

EJEMPLO:

$$10X – 8 = 12$$

$$10X – 8 + 8 = 12 + 8$$

$$10X = 20$$

$$\frac{10X}{10} = \frac{20}{10}$$

$$X = 2$$

ACTIVIDADES:

1) Resolver las siguientes ecuaciones:

a) $X + 4 = 9$

b) $X - 20 = 10$

c) $2X = 8$

d) $\frac{X}{3} = 2$

e) $X^2 = 4$

f) $\sqrt[3]{X} = 2$

g) $2X + 9 = 15$

h) $\frac{X+3}{2} = 4$

i) $X - 8 = 30 - 25$

j) $2X + 7 = 3 . 9$

k) $\frac{X}{2} - 3^2 = \sqrt[3]{121} - 2 . 5$

l) $X^2 - 5^2 = 7^2 - 3^2 + 1$

m) $\sqrt{X} + 8 = 3 . 5$

n) $X^3 + 1^4 = 8^2 + 3^0$

o) $3p + \sqrt{25} = \sqrt{16} . \sqrt{81} + 5$

p) $X^2 + 3 . 7 = 11^2$

q) $18 + \sqrt{X} + 1 = \frac{100}{5}$

r) $4 m - 14 . 4 = 8$

s) $3 . 5 + 7^0 - 2^3 = p : 2 - 1$

t) $10^2 + 8 = 12 . H - 6^2$

u) $12 + y : 7 - 3^2 = \sqrt{25}$

v) $2 . B + 4 : 2 = \sqrt{100}$

w) $P^2 + 10^2 = 5^3$

x) $\sqrt[3]{X} + 5^2 + 8 . 3 = 26 . 2$

y) $5X + 1 = 36$

z) $X + 5 - 1 = 26 - 14$

2) Completar la tabla con los números que faltan:

A	B	A + b	3 . B - a	A . B – (a + b)
5		11		
	15		30	
9	12			
8			19	
	4	10		
7			17	

3) Calcular el valor de "x" aplicando propiedad distributiva:

a) $2 . (X + 1) = 18$

b) $3 . (X - 1) = 3$

c) $8 . (X + 6) = 88$

d) $5 . (X - 4) = 15$

e) $7 . (X + 2) = 21$

f) $(X - 5) . 4 = 16$

g) $(X + 4) . 3 = 24$

h) $(X - 2) . 9 = 27$

i) $3 . (2X - 8) = 36$

LENGUAJE COLOQUIAL Y SIMBÓLICO

Las ecuaciones sirven a menudo para resolver problemas.

Para traducir un problema al lenguaje simbólico:

1) Realizar una lectura comprensiva para identificar cuales son las palabras más importantes, que indican las operaciones a realizar.
2) Traducir el enunciado en símbolos matemáticos y resolver la ecuación planteada.
3) Verificar si el resultado obtenido satisface las condiciones del problema.
4) Expresar la respuesta en lenguaje coloquial.

ACTIVIDADES:

1) Completar el siguiente cuadro:

LENGUAJE COLOQUIAL	LENGUAJE SIMBÓLICO
El doble de un número	
La mitad de un número	
La tercera parte de un número	
El triple de un número	
La cuarta parte de un número	
El cuádruple de un número	
Un número disminuido en tres	
El cuadrado de un número	
El cubo de un número	
El siguiente de un número	
El anterior de un número	
Si a un número se le agregan dos unidades	
El posterior de un número	
El cuadrado del doble de un número	
La diferencia entre un número y cinco	
El cociente entre un número y ocho	
El producto entre un número y siete	

2) Plantear la ecuación y resolver:

a) Si a la mitad de un número se lo disminuye en seis unidades, y al resultado se lo multiplica por tres, da nueve. ¿Cuál es dicho número?
b) El cociente entre un número y tres es igual a la diferencia entre veinticinco y doce. ¿Cuál es el número?
c) Si al doble de un número se lo aumenta en cinco unidades, y al resultado se lo divide por tres, se obtiene siete. ¿Cuál es el número?
d) Si al triple de un número se lo aumenta en cuatro unidades, y al resultado se lo multiplica por cinco, se obtiene cincuenta. ¿Cuál es el número?
e) Si a la mitad de un número se le suman siete unidades se obtiene veintiuno. ¿Cuál es el número?
f) La diferencia entre la tercera parte de un número y ocho es igual a la raíz cúbica de ocho. ¿Cuál es el número?
g) El triple del siguiente de un número es igual al doble de veintiuno. ¿Cuál es el número?
h) La suma entre un número y el triple de su anterior es treinta y tres. ¿Cuál es el número?
i) Si al triple de un número se le suma el cubo de dos, se obtiene el anterior de treinta. ¿Cuál es el número?
j) Si a la diferencia entre el cuadrado de un número y cuatro se la divide por cuatro, da ocho. ¿De qué número se trata?
k) La suma de un número y su consecutivo es 41. ¿Cuál es el número?
l) Averigua un número sabiendo que su doble, aumentado en 5 unidades, da diecisiete.

m) Si a la cuarta parte de la edad de Cristina le resto uno, obtengo la raíz cuadrada de cien. ¿Qué edad tiene Cristina?

n) El doble de la edad que tenía Juan hace cinco años es igual a treinta y dos años. ¿Qué edad tiene Juan?

o) El doble de un número menos 4 es igual al mismo número menos dos unidades. ¿Cuál es el número?

p) La suma de dos números es cincuenta. Calcula los dos números, si uno es cuatro veces mayor que el otro.

q) El doble de un número más el siguiente de dicho número es igual a treinta y cuatro. ¿De qué número se trata?

r) La diferencia entre la tercera parte de un número y el cubo de tres es igual a la mitad de catorce. ¿Cuál es el número?

s) Si al anterior de un número le agrego el doble de trece obtengo el cuadrado de ocho. ¿Cuál es el número?

t) El triple del cuadrado de un número es igual al cociente entre sesenta (60) y cinco (5). ¿Cuál es el número?

u) El triple de un número disminuido en dos es igual al doble del número aumentado en cinco unidades. ¿Cuál es el número?

v) La mitad del siguiente de un número más el cuádruple de tres da veinticinco. ¿Cuál es el número?

w) El cuadrado de la diferencia entre el doble de un número y uno da cuarenta y nueve. ¿Cuál es el número?

x) La raíz cuadrada del producto entre un número y dos es igual al doble de uno. ¿Cuál es el número?

y) La tercera parte del anterior de un número es igual al triple de quince. ¿Cuál es el número?

z) Si a un número le agrego tres unidades y al resultado lo multiplico por cuatro se obtiene la raíz cuadrada de sesenta y cuatro. ¿Cuál es el número?

UNIDAD 2: NÚMEROS ENTEROS

El conjunto de los números enteros es infinito, ya que no hay un primer ni un último elemento. El conjunto de los números naturales está incluído dentro del conjunto de los números enteros.

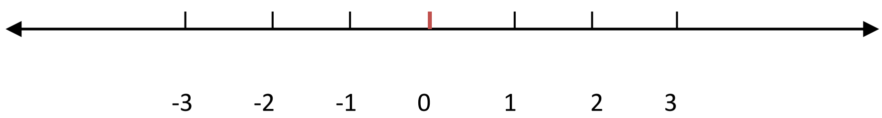
<u>Está formado por los números:</u>

<u>Positivos:</u> 1, 2, 3, 4…….(los números naturales)

<u>Negativos:</u> -1, -2, -3, -4…….

<u>El cero:</u> es un número entero que no es positivo ni negativo.

REPRESENTACIÓN EN LA RECTA NUMÉRICA

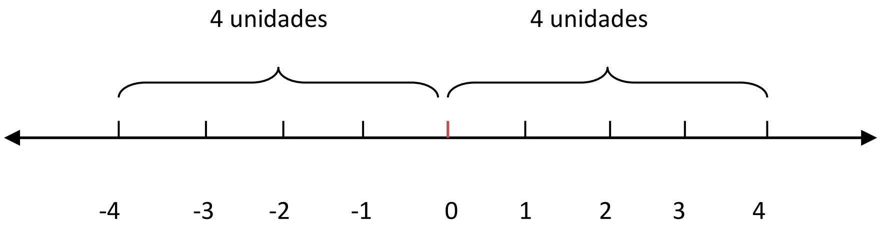


<u>Opuesto de un número</u>

El opuesto de un número entero es aquel que se encuentra a la misma distancia del cero.

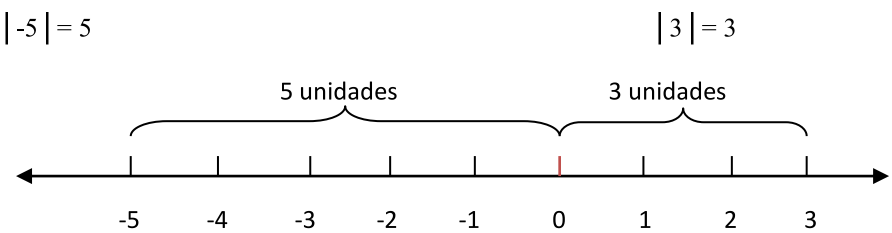
Ejemplo:

- El opuesto de -4 es 4



VALOR ABSOLUTO O MÓDULO DE UN NÚMERO

El valor absoluto o módulo de un número es la distancia que lo separa del cero.



- El módulo de cualquier número es siempre positivo.
- Un número y su opuesto tienen el mismo módulo (por encontrarse a la misma distancia del cero).

ORDEN EN EL CONJUNTO DE LOS NÚMEROS ENTEROS

Al comparar números negativos aquel que tiene mayor valor absoluto es el número más chico

$$-2 > -8$$

Al comparar números positivos aquel que tiene menor valor absoluto es el número más chico

$$3 < 10$$

ACTIVIDADES:

1) Escribe el número que representa cada situación.

A. Un submarino está sumergido a 93 metros.

B. La temperatura es de 4 ^{0}C.

C. Está 6 metros sobre el nivel del mar.

D. Tiene $35 en sus ahorros.

E. La temperatura es de 15 ^{0} C bajo cero.

F. 36 metros bajo el nivel del mar.

G. 18 ^{0}C sobre el punto de congelación del agua.

H. Debe $200.

I. Se hundió un metro bajo el nivel del mar.

J. 5 ^{0}C bajo el punto de congelación.

K. Debe $ 41 a su hermana.

L. Tiene $ 805 en su alcancía.

M. La cima de la montaña está a 1500 metros sobre el nivel del mar.

N. La Ciudad de México está a 2.303 metros sobre el nivel del mar.

O. El helicóptero se elevó 1650 metros sobre el nivel del mar.

P. Un día de invierno, la temperatura, contando el factor viento, llegó a 32 ^{0}C bajo cero.

2) Representar en la recta numérica los siguientes números:

10, -8, 0, -14, 2, -2, 1, -3

3) Escribe los números de menor a mayor.

A. 0, 4, -3, -1

B. 1, -1, 2, -2

C. 8, -21, 22, -3

D.. -5, -7, 0, -9, -145

E. 31, -31, 30, -30

F. 100, -21, 38, 5

G. 27, -58, -2, 4

H. 12, -5, -6, -4

I. -54, -56, -61, -51

J. 3, -3, 7, -7

4) Completar el siguiente cuadro:

NÚMERO	OPUESTO	VALOR ABSOLUTO	ANTERIOR	POSTERIOR
1				
-13				
0				
18				
-1				
-101				
-299				
71				

1) Completar con **< , > ó =**

A. 3 _ _ _ _ _5

B. 1 _ _ _ _ -1

C. -5 _ _ _ _ -6

D. -34 _ _ _ _ 34

E. 67 _ _ _ _ -67

F. 0 _ _ _ _ -12

G. -21 _ _ _ _ -20

H. 8 _ _ _ _ 25

I. 12 _ _ _ _ -12

J. -99 _ _ _ _ -100

K. 2 _ _ _ _ 3

L. -14 _ _ _ _ 15

SUMA Y RESTA DE NÚMEROS ENTEROS:

Cuando los signos son iguales, se suma y se conserva el signo.

$$10 + 5 = +15$$

$$-6 - 8 = -14$$

Cuando los signos son distintos, se resta y se conserva el signo del número que tiene mayor valor absoluto.

$$-10 + 15 = +5$$

$$-17 + 6 = -11$$

<u>Actividades:</u>

1) Resolver:

a) $-9 + 6 - 8 + 3 =$

b) $18 - 25 + 5 - 2 =$

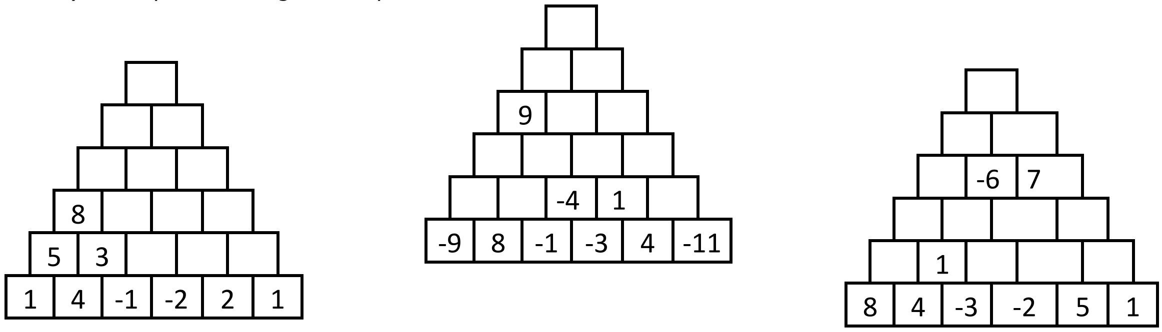
c) $23 - 15 - 12 + 9 =$

d) $8 - 10 - 11 - 5 =$

e) $-6 - 8 - 11 - 21 + 32 =$

f) $16 - 18 - 2 + 3 =$

2) Completar las siguientes pirámides:



<u>Signo antes del paréntesis</u>

- El signo más (+) delante del paréntesis no cambia el signo de los números que están dentro del mismo.
- El signo menos (-) delante del paréntesis cambia el signo de todos los números que están dentro del mismo.

<u>Ejemplos:</u>

10 + (- 8) =10 – 8 = 2

5 + (+ 2) = 5 + 2 = 7

- 5 – (- 3) = -5+3 = -2

- 6 – (+ 5) = - 6 – 5 = -11

<u>Actividades:</u>

1) Resolver las siguientes operaciones eliminando paréntesis:

a) (+12) + (+5)=
b) (+30) + (-45)=
c) (-14) + (+16)=
d) (+50) + (+25)=
e) (+25) + (-8)=
f) (-14) + (4)=
g) (-14) + (-2)=
h) (+20) + (-20)=
i) (-7) + (+7)=
j) (-20) + (-30)=

k) (12) + (-17)=
l) (5) + (-8)=
m) (35) + (-15)=
n) (-9) + (-8)=
o) (0) + (-3)=
p) (+8) – (-2) =
q) (+12) – (+5) =
r) (+8) - (-8) =
s) (– 4) – (+11) =
t) (+4) – (+5) =
u) (+8) – (+8) =

v) (+7) – (-8) =
w) (-9) – (-7) =
x) (-2) – (-3) =
y) (– 9) – (-3) =
z) (+3) – (-5) =
aa) (+6) – (-1) =
bb) (-14) – (-14) =
cc) 0 - (-4) =
dd) -1 – (-15) =

2) resolver los siguientes ejercicios, eliminando paréntesis y corchetes

A) 3 + 2 - (9 - 7) + (3 + 4)=

B) 3 + 4 + (4 + 7) + 4 – 9=

C) 45 - 28 - (3 - 9) + (2 + 3)=

D) 15 - 4 - (5 – 4) + (2 - 3) - 16 =

E) - 4 + 5 - (3 + 4 – 5) - 7 + (6 + 4) - 7 - 6 + 4 =

F) -13 - 5 + 6 + (7 - 8 + 1) - 6 =

G) 14 + 5 - 4 + 3 + (- 2 + 4 + 5) - 7 =

H) 4 – 5 – (7 + 8) – (5 - 2)=

I) 5 - 3 - (4 - 7) - 5 + (4 - 2) - 6 + 3 =

J) 2 – (4 + 3) - (7 - 5) - (4 - 8)=

K) - (1 + 5 + 4 – 3) - 7 + 1 - (7 + 8 + 6 - 9 – 23) =

L) 1 + (3 + 5) – (8 + 6 -23) + (45 – 66)=

M) - 5 – (2 + 4 – 7) + 8 – (2) + 5 + 3 – 2 + (5 - 6) – (3 – 5)=

N) 5 + 4 - [5 - (6 + 5 - 8) + (9 - 1 + 4)] =

O) 3- 2 - [4 - (6 + 4) - 9 + (1 - 3) - 8] + 4 =

P) 2 - [2 - (2 - 3 + 1) + 2 + 3] - 2 =

Q) 3 - 2 - 3 - [- 2 + (1 + 3)] - 3 =

R) 2 + 3 - 2 - [2 - 3 + 1 - 2 - (3 - 1)] - 2 =

S) 2 - 4 - (- 2 - 3) - 2 - [- 2 - (- 2 + 3)] - 1 + 2 =

MULTIPLICACIÓN Y DIVISIÓN CON NÚMEROS ENTEROS

Regla de los signos (multiplicación)
+ · + = +
+ · - = -
- · - = +
- · + = -

Regla de los signos (división)
+ : + = +
+ : - = -
- : - = +
- : + = -

Cuando se dividen o multiplican dos números de igual signo, el resultado es positivo.

Cuando se dividen o multiplican dos números de distinto signo, el resultado es negativo.

Ejemplos:

$$(-4) \cdot (-8) = +32$$

$$(+5) \cdot (-2) = -10$$

$$(-36) : (+9) = -4$$

$$(-80) : (-10) = +8$$

Actividades:

1) Resolver los siguientes productos y cocientes:

a) $(-10) \cdot 25 =$

b) $-54 : (-9) =$

c) $33 : (-3) =$

d) $(-13) : (-13) =$

e) $8 \cdot (-7) =$

f) $(-11) \cdot (-6) =$

2) Completar para que la igualdad sea verdadera:

a) $\_\_ \cdot (-3) = -18$

b) $144 : \_\_ = -12$

c) $-45 : \_\_ = 9$

d) $-9 \cdot \_\_ = -72$

3) Resolver los siguientes ejercicios combinados:

a) $(-3) \cdot [(-1) + 9] =$

b) $(-1) \cdot (-2) \cdot 3 \cdot 5 \cdot (-2) =$

c) $(-3) \cdot (-2-5) =$

d) $7 \cdot (-2) \cdot [(-3+1) \cdot (-2)] =$

e) $(-14) \cdot (+6) : (-21) + (-9) =$

f) $[-(-36) : (-4)] - (-5-8) - (-6) =$

g) $-\{-24 : (-9+3) - [-7 \cdot (-11)] - 1\} : (-2) =$

h) $6 \cdot (2-3) =$

i) $4 \cdot (-3-5) =$

j) $-2 \cdot +5 \cdot (-3) =$

k) $7 + 3 \cdot (-5) =$

l) $5 - (-3) \cdot 7 - 4 =$

m) $-7 \cdot (-3) - 4 \cdot 2 =$

n) $-2 \cdot (-4) - 4 \cdot 5 - 7 + 15 =$

o) $6 \cdot (-3) - 7 \cdot (-4) - 5 + 3 =$

p) $5 \cdot 2 + 8 (-2) + 8 - 2$

q) $(-3+9) \cdot [-32 : (-8)] =$

r) $(-8+3) \cdot (5-9) =$

s) $4 \cdot (-3) \cdot (10-15) =$

t) $(-18+12) : 6 =$

u) (–16 + 12 – 2 + 10) : 2 =

v) (32 – 16 – 8) : (– 8) =

w) 60 : (–10 . 2) =

x) 6 – (-2) . 4 – 2 =

y) 4 . (-5) – 5 . (-6) – 9 – 5 =

z) 2 . (-5) + 3 . (-5) – (-25) =

aa) – 4 . (-6) – 3 . 4 =

bb) 60 : (– 5) + 10 : (– 5) =

cc) (-14) . (+6) : (-21) + (-9) =

dd) [- (-36) : (-4)]- (-5-8)- (-6) =

ee) 3 – 5 : (-1) + 0 . (-3) =

ff) 4 – 2 . (-5) – 10 =

gg) – 12 : 3 + 2 . (-8) =

hh) (-5 +1) -3 . (-2) =

ii) [(-2) · (-4) + (-3) · (-6)] : (-13) =

jj) [(+4) · (-5) + (-6) · (-3)] : 19 =

kk) [(-8) · (-4) + (+8) · (-6)] : (-10) =

ll) [(-9) · (-3) + (-9) · (-8)] : (-11) =

mm) [(+3) · (-8) + (-4) · (-10)] : 8 =

nn) [(-4) · (+9) + (-11) · (+2)] : (-2) =

oo) (-9) . (-1) + 5 . 3 – 5 . (-2) =

pp) 7 . (-6) + (-6) . (-4) + (-3) . 8 =

qq) 3 . (-4) . 7 . 1 -4 . (-5) -3 . (-4) . 20 . (-30) . 0 =

rr) 6 . (-2) – (-4) . (-5) + (-3) . (-7) =

ss) 5 . (-4) : (-2) – 6 : (-3) + 4 . 2 : 2 =

tt) 10 : (-5) – 18 : (-3) – (-4) . (-5) . (-3) – (-10) : 2 =

4) Resolver:

a) $\dfrac{(-2)\cdot(-4)+(-3)\cdot(-6)}{-13} =$

b) $\dfrac{(-3)\cdot(+8)+(-5)\cdot(+3)}{-13} =$

c) $\dfrac{(+4)\cdot(-5)+(-6)\cdot(-3)}{-2} =$

d) $\dfrac{(-8)\cdot(+4)+(+8)\cdot(-6)}{(-10)} =$

e) $\dfrac{(-9)\cdot(-3)+(-9)\cdot(-8)}{11} =$

f) $\dfrac{(+3)\cdot(-8)+(-4)\cdot(-10)}{-8} =$

g) $\dfrac{(-4)\cdot(+9)+(-11)\cdot(+2)}{-2} =$

POTENCIACIÓN CON NÚMEROS ENTEROS

- $\mathbf{(-2)^3}$ = (- 2) . (- 2) . (- 2) = **- 8**
- $\mathbf{(-3)^2}$ = (- 3) . (- 3) = **+ 9**
- $\mathbf{(+2)^4}$ =(+ 2) . (+ 2) . (+ 2) . (+ 2) = **+ 16**
- $\mathbf{(+3)^3}$ = (+ 3) . (+ 3) . (+ 3) = **+ 27**

(base)$^{\text{exponente}}$	Resultado
$(+)^{\text{par}}$	Positivo
$(+)^{\text{impar}}$	Positivo
$(-)^{\text{par}}$	Positivo
$(-)^{\text{impar}}$	Negativo

Actividades

1) Calcular las siguientes potencias:

a) $(-2)^2$
b) $(-3)^3$
c) $(-4)^2$
d) $(-10)^5$
e) $(-1)^2$
f) 0^4
g) $(-4+1)^0$
h) $(3 . 2 - 7)^3$
i) $(-20: 4)^1$
j) $(-12 : 3 + 8 : 2)^4$
k) $(-7+5)^5$
l) $(-18: 3)^3$

RADICACIÓN CON NÚMEROS ENTEROS

- $\sqrt[3]{27}$ = 3 porque $3^3 = 27$
- $\sqrt[3]{-8}$ = -2 porque $(-2)^3 = -8$
- $\sqrt[4]{16}$ = ± 2 porque $(+2)^4 = 16$ y $(-2)^4 = 16$ (en los ejercicios combinados utilizamos el resultado positivo)
- $\sqrt{-4}$ = no tiene solución en el conjunto de los números enteros

$\sqrt[índice]{radicando}$	Resultado
$\sqrt[impar]{+}$	Positivo
$\sqrt[impar]{-}$	Negativo
$\sqrt[par]{+}$	Positivo y negativo
$\sqrt[par]{-}$	No existe solución

<u>Actividades</u>

2) Calcular las siguientes raíces:

a) $\sqrt{4}$
b) $\sqrt[3]{-27}$
c) $\sqrt[4]{-16}$
d) $\sqrt[4]{81}$
e) $\sqrt[3]{64}$
f) $\sqrt[4]{1}$
g) $\sqrt[5]{0}$
h) $\sqrt[5]{-1}$
i) $\sqrt[4]{16}$
j) $\sqrt[5]{100000}$
k) $\sqrt{-100}$
l) $\sqrt[4]{-1}$
m) $\sqrt{64}$
n) $\sqrt[5]{-32}$
o) $\sqrt[3]{-216}$
p) $\sqrt[17]{-1}$
q) $\sqrt[3]{-8}$
r) $\sqrt[3]{-64}$
s) $\sqrt{-9}$
t) $\sqrt[3]{-1000}$

3) Resolver las siguientes operaciones combinadas:

a) $\sqrt{-(8.5 - 2^3) : (-2)}$ =

b) $\sqrt{(3.5 + 1)}$: (- 4) =

c) $\sqrt[4]{6.(-10)^2 + (-5)^2}$ =

d) $\sqrt{(-7)^2}.(-2)^2 - 3.5 + (-2.3)^2$ =

e) $\sqrt{25} - 9 + 3 . (-2)^3$ =

f) $2 . (2 . \sqrt[4]{81} : 3) + (- 3)^3 : 9$ =

g) $(\sqrt[5]{-32} + 5)^2 : 3 + 3 (5 - 9)^2$ =

h) $(\sqrt{4} + \sqrt{9})^2 - 8 : 2 - (2^2)^2$ =

i) $\sqrt[3]{1 - 9} - (-2)^2 . 3 : (- 6)$ =

j) $(- 3)^2 : (- 4 + 1) + \sqrt{(-7)(-6) - (-12):(-2)}$ =

k) $[20 : \sqrt{25} + \sqrt[3]{-27}.(-2)^2]^2$ =

l) $[(-6)^2 : \sqrt{81}]^2 : \sqrt{64} - \sqrt{4}$ =

m) $\sqrt{[(3 - 2).9 : 3 + 4].7}$ =

n) $[\sqrt[3]{\sqrt{64}} - 3] . (1 - 2^2)$ =

o) $\sqrt{\sqrt{81}} + \sqrt{256} - \sqrt{13^2} - (-12)^2$ =

p) $[4 - 5 . (-3) + 2 - (2 - 5)^2] : \sqrt{5.2^3 - 2^2}$ =

1) Resolver las siguientes ecuaciones, aplicar propiedad distributiva cuando sea necesario:

a) $-3x = 18$

b) $-7x = 21$

c) $-6x - 9 = -3$

d) $5 + 4x = -3$

e) $-10x = -50$

f) $-4x = 20$

g) $-11x = -22$

h) $-2x + 2 = -10$

i) $4 - x = 6$

j) $X : (-5) = -20$

k) $2x - 5 = 11$

l) $(2 - x) . (-5) = -25$

m) $12 . (x : 3) + 2 = (-5) . 6 + (-2) . 4$

n) $4 + x : (-2) = \sqrt[3]{-1}$

o) $2 . (3 + 2x) + (-3) . (x - 1) = 0$

p) $7 - 2x = (-13).(-3) + 2$

q) $4 . (x - 8) = 6 - 30$

r) $-x + 4 - 7 = 0$

s) $2x + 4 = 3x$

t) $5x - 14 = 7x$

u) $39 + 3x = -10x$

v) $7x + 2 - 5x = x + 8 - x$

w) $6x - 3 - 4x - x = 5x + 8 - x - 6 - 4x$

x) $-12x - 36 = 0$

y) $3 (x - 5) = 6 + 2 (x - 7)$

z) $3x + 5 - 8x = 8 - 3x - (-3)^2$

aa) $\sqrt{81} - 4x = 6x - 5^2 + \sqrt{16}$

bb) $8x - \sqrt{64} - \sqrt[3]{-27} = 9x + (-2)^2$

cc) $4x - 3(x - 2) = (-2)^1 + (-6)^2$

dd) $5(2x-1)-2(3x+1) = -1$

ee) $2.(5x - 3) - (x + 1) = 11$

ff) $4 - x^2 = 0$

gg) $3(x^2 + 2) - 5 = 15 + (-2)(-1)^4$

hh) $\sqrt[3]{2X} + 6 = 2$

ii) $(2n-3)^3 + 125 = 0$

jj) $X - 5x + (-3)^2 = 4(x - 1) + \sqrt{9} . (-1)$

UNIDAD 3: DIVISIBILIDAD

MÚLTIPLOS Y DIVISORES

MÚLTIPLO DE UN NÚMERO:

Un número es múltiplo de otro si es el resultado de haberlo multiplicado por algún número natural.

Por ejemplo:

Múltiplos de 8: 8; 16; 32; 64; 80; 88;112…………………..

- Un número tiene infinitos múltiplos, por ser infinito el conjunto de los números naturales.
- El cero es múltiplo de todos los números.
- Todo número es múltiplo de sí mismo.

DIVISOR UN NÚMERO:

Un número es divisor de otro, si la división entre ellos es exacta, es decir, que el resto es cero.

Por ejemplo:

Divisores de 36: 1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36

- La cantidad de divisores de un número es finita.
- El uno es divisor de todos los números.
- Todo número es divisor de sí mismo.

CRITERIOS DE DIVISIBILIDAD

Los criterios de divisibilidad nos permiten saber si un número es divisible por otro si necesidad de hacer la cuenta.

A continuación enumeramos algunos de esos criterios:

- **Divisibilidad por 2:** un número es divisible por 2 si termina 0 o en una cifra par: 2, 4, 6, o 8.
- **Divisibilidad por 3:** un número es divisible por 3 si la suma de sus cifras es múltiplo de 3.
- **Divisibilidad por 4:** un número es divisible por 4 si el número formado por sus dos últimas cifras es múltiplo 4.
- **Divisibilidad por 5:** un número es divisible por 5 si termina 0 o en 5.
- **Divisibilidad por 6:** un número es divisible por 6 si es divisible por 2 y por 3.
- **Divisibilidad por 9:** un número es divisible por 9 si la suma de sus cifras es múltiplo de 9.
- **Divisibilidad por 10:** un número es divisible por 10 si termina 0.

Importante: la relación "es múltiplo de" y la relación "es divisible por", son relaciones inversas. Por lo tanto, decir que un número es múltiplo de o divisible por, es lo mismo.

Por ejemplo: 16 es múltiplo de 2 o 16 es divisible por 2 significa lo mismo.

Ejercicios:

1) Completar para que el número 2 _ 5 sea múltiplo de 3 pero no de 9?

2) ¿qué cifras pueden escribirse a la derecha de 25 para obtener un número de tres cifras divisible por 2?
3) ¿qué cifra hay que añadir a la izquierda de 286 para obtener un número de cuatro cifras que sea divisible por 9?
4) Sustituyan x por un dígito, de modo que el número *1.48x* sea:
   A) divisible por 5 pero no por 3.
   B) divisible por 3 pero no por 5.
   C) divisible a la vez por 3, por 5
   D) divisible por 4 pero no por 5.
5) Los 36 alumnos y alumnas de una clase quieren agruparse en equipos con el mismo número de integrantes. ¿de cuántas formas se pueden agrupar y qué número de integrantes habría por equipo en cada caso?
6) La profesora de matemática quiere hacer grupos iguales con sus alumnos. Si los agrupa de 2 en 2 o de 3en 3 sobra un alumno, pero si los agrupa de 5 en 5 no sobra ninguno. ¿cuántos alumnos tiene en clase?
7) Un granjero, tras llenar una cesta con huevos, piensa: "si los envaso por docenas, me sobran 5, si tuviera uno más podría envasarlos exactamente en cajas de 10". El granjero juntó casi 100 huevos. ¿cuántos juntó exactamente?
8) Hallen todos los divisores de los siguientes números.

A) 18 b) 29 c) 225 d) 1.024 e) 24
F) 32 g) 42 h) 50 i) 80 j) 36

9) Tachar los números que no cumplen con la condición pedida en cada caso:

a) Múltiplo de 12.

6	18	36	0	60	84	90	144	12	4

b) Divisor de 36.

1	4	15	72	18	0	3	36	24	9

c) Divisible por 9.

3	21	18	90	1	9	72	81	109	60

d) Múltiplo de 18.

18	9	24	36	1	0	54	72	100	6

e) Divisor de 100.

10	0	1	25	200	50	75	5	100	1000

10) Completar el cuadro:

Divisible por	204	405	8.415	2.750	765	324	84	3.213	704
2									
3									
4									
5									
6									
9									
10									

11) Escribir el número que cumpla con la condición pedida:

a) El menor múltiplo de 14 mayor que 200
b) El mayor múltiplo de 17 menor que 300
c) El mayor divisor de 225 distinto de 225
d) El múltiplo de 23 entre 50 y 170

e) Múltiplo de 4 y divisor de 72
f) Divisible por 3 y por 15
g) Divisor de 96 y múltiplo de 6
h) Múltiplo de 8 y divisible por 32
i) Múltiplo de 12 y de 7

NÚMEROS PRIMOS Y COMPUESTOS

Los números **primos** son aquellos números que tienen sólo dos divisores, el 1 y el mismo número.

Los números **compuestos** son aquellos números que tienen más de dos divisores.

Importante: el número 1 no es primo ni compuesto.

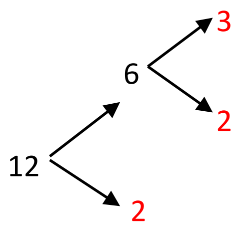
A continuación aparece la denominada "criba de eratóstenes", esta tabla nos permite obtener todos los números primos menores a un determinado número natural. En este caso menores que cien.
1º) se elimina el número 1, por no ser un número primo.
2º) se resalta el número 2 y se tachan los múltiplos de 2.
3º) se resalta el siguiente número libre, que en este caso es el número 3, y se tachan los múltiplos de 3.
4º) se resalta el siguiente número libre, se tachan los múltiplos de ese número y se sigue con este procedimiento hasta que todos los números de la tabla estén tachados o resaltados.

	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

FACTORIZACION

Factorizar un número significa escribirlo como el producto de números primos.

Ejemplo:



$$12 = 3 \, . \, 2 \, . \, 2$$

$$12 = 3 \, . \, 2^2$$

Otra forma de factorizar:

36	2
18	2
9	3
3	3
1	

Factores primos $36 = 2^2 \, . \, 3^2$

Ejercicio:

Escribir como producto de números primos los siguientes números:
16, 32, 45, 100, 105, 225, 25, 36, 9, 150, 315, 5.040, 2.340, 1.155.

MÍNIMO COMÚN MÚLTIPLO

El **mínimo común múltiplo** (m. C. M.) Entre dos o más números se calcula multiplicando los factores comunes y no comunes, elevados al mayor exponente.

Ejemplo:

Para calcular el m. c. m. Entre 12 y 40 se procede de la siguiente manera:

1º) factorizar ambos números:

12	2
6	2
3	3
1	

40	2
20	2
10	2
5	5
1	

$12 = 2^2 . \, 3$ $\qquad$ $40 = 2^3 \, . \, 5$

2º) buscar los factores comunes y no comunes:

$$\text{m. c. m. } (12 \text{ y } 40) = 2^3 \, . \, 3 \, . \, 5 = 120$$

MÁXIMO COMÚN DIVISOR

El **máximo común divisor** (M. C. D.) Entre dos o más números se calcula multiplicando los factores comunes elevados al menor exponente.

Ejemplo:

Para calcular el M. C. D. Entre 42, 49 y 28 se procede de la siguiente manera:

1º) factorizar los números:

42	2
21	3
7	7
1	

49	7
7	7
1	

28	2
14	2
7	7
1	

$42 = 2 . 3 . 7$ $\quad$ $49 = 7^2$ $\quad$ $28 = 2^2 . 7$

2º) buscar los factores comunes **a los tres números** con el menor exponente:

$$\text{M. C. D. } (42, 49 \text{ y } 28) = 7$$

Ejercicio:

1) Hallar el m. c. m. y M. C. D. De los siguientes números:

a) 15 y 18
b) 15 y 21
c) 18 y 4
d) 20 y 8
e) 24 y 12
f) 16 y 6
g) 32, 8 y 4
h) 8, 20 y 4
i) 12, 18 y 6
j) 16, 8 y 24
k) 14, 11 y 7
l) 18, 12 y 20
m) 20, 15 y 25
n) 18, 16, 64 y 72
o) 20, 24, 48 y 36

2) Resolver los siguientes problemas utilizando m. c. m. o M. C. D. Según corresponda:

a) Para realizar una encuesta para matemática, Mariana sale cada 2 días, Natalia cada 6 y Andrés cada 3. Los tres se encontraron, el viernes 4 de julio. ¿en cuántos días más volverán a encontrarse? ¿qué fecha será?
b) De un aeropuerto salen aviones cada 3 horas con destino a México y cada 6 a España. La 1ª vez salen simultáneamente a las 5. ¿en cuántas horas más volverán a salir juntos? ¿qué hora marcará el reloj?
c) Se desea repartir en partes iguales 140 libros de cuentos y 60 de poesías. ¿cuál es el mayor número de paquetes que se puede hacer, teniendo en cuenta que cada paquete debe contener la misma cantidad de libros?
d) La secretaria de una escuela coloca las tizas en cajitas. En cada cajita tendrá la misma cantidad de tizas. Tiene 45 tizas de color y 80 blancas. ¿cuál es la mayor cantidad de cajitas que necesita? ¿cuántas tizas de cada color pondrá en cada cajita?
e) Juliana tiene que armar sorpresitas iguales para el cumpleaños de su hermanito. Cuenta con 140 golosinas y 60 juguetitos. ¿cuál es la mayor cantidad de sorpresitas que puede armar?
f) Camila, Gabriela y Florencia son azafatas y trabajan en distintas compañías aéreas. Cada vez que se encuentran cenan juntas. Camila vuela a bs. As. Cada 6 días; Gabriela cada 8 y Florencia cada

12. El 1º de junio cenaron juntas ¿dentro de cuántos días volverán a encontrarse para cenar? ¿qué fecha será?

g) Con 36 rosas y 27 claveles julia quiere armar ramos iguales. ¿cuál es la mayor cantidad de ramos iguales que puede armar? ¿cuántas flores de cada clase podrá poner en cada ramo?

h) En un colegio organizan un campeonato de ajedrez cada 2 meses y una maratón de lectura cada 3 meses. Si las dos actividades se realizaron por primera vez el mismo día, ¿cada cuántos meses volverá a coincidir?

i) Cada 15 días, Sofía se reúne por la tarde con sus amigas para ir al cine, y cada 10 días, por la mañana, juega al tenis con sus primos. Si la última vez que coincidieron las dos actividades fue el 3 de junio, ¿cada cuántos días se volverá a repetir? ¿qué fecha será?

j) Para donar a unas escuelitas se juntaron 120 cuadernos, 60 cajas de lápices de colores, y 36 cajas de lápices negros. Se quiere separar lo donado en bolsas con la misma cantidad de útiles. ¿cuál es la mayor cantidad de bolsas que se usará? ¿cuántos útiles de cada clase contendrá cada bolsa?

k) Emilia está enferma y debe tomar un medicamento cada 8 horas y otro cada 4. A las 6 tomó los dos medicamentos juntos. ¿cada cuántas horas tomará los dos medicamentos a la vez? ¿qué hora marcará el reloj?

l) Para realizar encuestas Juan sale cada 4 días, José cada 2 y Adriana cada 3. Si el 12 de junio salieron los tres juntos. ¿cada cuánto ocurrirá nuevamente? ¿qué fecha será?

m) Andrea necesita hacer la mayor cantidad de arreglos florales y que en todos ellos haya rosas y claveles. Cuenta con 64 rosas y 36 claveles. Todos los arreglos tendrán la misma cantidad de flores. ¿cuántos arreglos puede hacer? ¿qué cantidad de rosas y de claveles tendrá cada arreglo?

n) La línea 1 de colectivo circula cada 9 minutos y la línea 2 cada 21 minutos. Son las 15:00 y está saliendo un colectivo de cada línea, ¿a qué hora volverán a salir las dos líneas juntas?

o) Mariano armó lapiceros iguales. Puso marcadores rojos y azules en cada uno. En total usó 20 azules y 16 rojos. Además, armó la mayor cantidad posible de lapiceros. ¿cuántos armó? ¿cuántos marcadores rojos y azules puso en cada uno?

p) Con 36 caramelos, 48 bolitas y 18 autitos se armaron bolsitas de cotillón que contienen lo mismo. ¿cuál es la mayor cantidad de bolsitas que pudieron armar? ¿qué contiene cada bolsita?

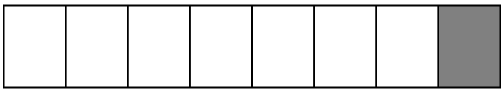
q) Un grupo de alumnos desea donar útiles a una escuela. Tienen 140 cuadernos, 35 cajas de lápices negros y 60 manuales. En todas las cajas habrá la misma cantidad de útiles. ¿cuál es la mayor cantidad de cajas que necesitará? ¿cuántos útiles de cada tipo tendrá cada caja?

UNIDAD 4: NÚMEROS RACIONALES

El conjunto q de los números racionales está formado por todos los números que pueden expresarse como fracción. Son los números $\frac{a}{b}$, con a y b enteros, y b ≠ 0.

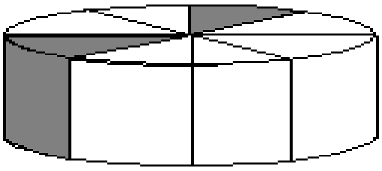
REPRESENTACIÓN GRÁFICA

$$\frac{1}{8}$$



$$\frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{2}{8} = \frac{1}{4}$$



Pueden observar en las representaciones anteriores que hay fracciones que representan la misma porción, se llaman fracciones equivalentes.

Las fracciones equievalentes se obtienen por simplicación o por amplificación. Es decir, dividiendo o multiplicando numerador y denominador por el mismo número. Cuando no es posible simplificar decimos que la fracción es **irreducible.**

<u>Ejemplo:</u>

Fracciones equivalentes a $\frac{36}{24}$

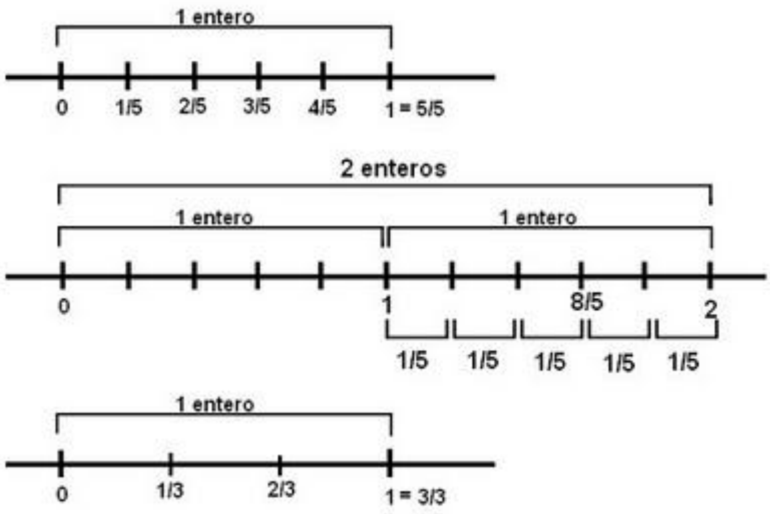
Simplificando tenemos: $\frac{36}{24} = \frac{18}{12} = \frac{9}{6} = \frac{3}{2}$ ⟶ Fracción irreducible

Amplificando tenemos: $\frac{36}{24} = \frac{72}{48} =$ ……………………………………= $\frac{360}{240}$ =………………………

<u>Observación</u>: una fracción tiene infinitas fracciones equivalentes. Su ubicación en la recta numérica es la misma.

Todo número entero puede expresarse como una fracción de denominador 1.

REPRESENTACIÓN EN LA RECTA NUMÉRICA



De la misma manera se representan las fracciones negativas, a la izquierda del cero.

SUMA Y RESTA DE FRACCIONES

CON EL MISMO DENOMINADOR:

$$\frac{3}{5} = \frac{8}{5} = \frac{3+8}{5} = \frac{11}{5}$$

$$-\frac{5}{6} + \frac{1}{6} = \frac{-5+1}{6} = -\frac{4}{6} = -\frac{2}{3}$$

CON DISTINTO DENOMINADOR:

Si las fracciones tienen distinto denominador, se buscan fracciones equivalentes con un denominador común. Es conveniente que este denominador sea el mínimo común múltiplo entre los denominadores.

$$-\frac{5}{3} + \frac{7}{5} = -\frac{25}{15} + \frac{21}{15} = \frac{-25+21}{15} = -\frac{4}{15}$$

$$\frac{5}{6} + 2 = \frac{5}{6} + \frac{12}{6} = \frac{5+12}{6} = \frac{17}{6}$$

MULTIPLICACIÓN Y DIVISIÓN DE FRACCIONES

MULTIPLICACIÓN DE FRACCIONES:

Para multiplicar fracciones se multiplican numerador con numerador y denominador con denominador.

$$\frac{3}{8} \cdot \left(-\frac{5}{2}\right) = \frac{3 \,.\, (-5)}{8 \,.\, 2} = -\frac{15}{16}$$

$$\left(-\frac{3}{4}\right).(-7)=\frac{(-3).(-7)}{4}=\frac{21}{4}$$

DIVISIÓN DE FRACCIONES:

Para dividir fracciones se multiplica la primera fracción con la inversa de la segunda fracción.

$$\frac{2}{9}:\left(-\frac{5}{4}\right)=\frac{2}{9}.\left(-\frac{4}{5}\right)=-\frac{8}{45}$$

$$-\frac{8}{3}:6=-\frac{8}{3}.\frac{1}{6}=-\frac{8}{18}=-\frac{4}{9}$$

Ejercicios:

1) realizar las siguientes operaciones:

a) $\frac{3}{8}+\frac{5}{12}=$

b) $\frac{4}{3}+\frac{3}{4}=$

c) $\frac{2}{15}+\frac{3}{10}=$

d) $-\frac{4}{9}+\frac{5}{6}=$

e) $2+\frac{3}{5}=$

f) $\frac{4}{7}+1=$

g) $\frac{3}{5}+\frac{7}{15}=$

h) $\frac{4}{10}+\frac{3}{5}=$

i) $\frac{7}{12}+\frac{9}{10}=$

j) $\frac{3}{4}+\frac{2}{5}+\frac{5}{6}=$

k) $\frac{1}{2}+\frac{3}{8}+\frac{3}{4}=$

l) $\frac{5}{4}+2+\frac{4}{6}+3=$

m) $5+\frac{3}{4}+\frac{1}{2}=$

n) $\frac{1}{3}-\frac{4}{5}=$

o) $\frac{5}{12}-\frac{3}{8}=$

p) $\frac{4}{15}-\frac{7}{10}=$

q) $-\frac{3}{4}-\frac{1}{2}=$

r) $-\frac{4}{3}-\frac{9}{8}=$

s) $5-\frac{4}{5}=$

t) $\frac{5}{8}-3=$

u) $-\frac{2}{15}-\left(-\frac{4}{6}\right)=$

v) $\frac{1}{2}-\frac{5}{6}+\frac{3}{8}=$

w) $2-\frac{4}{9}-\frac{5}{6}+\frac{1}{2}=$

x) $\frac{3}{4}-\left(\frac{1}{2}+\frac{2}{3}\right)=$

y) $\left(\frac{3}{2}-1\right)-\left(\frac{4}{3}+2\right)=$

z) $\left(\frac{7}{3}-4\right)-\left(\frac{2}{5}-\frac{1}{2}\right)=$

aa) $\frac{3}{4}-\left[-2-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)+4\right]=$

2) calcular los siguientes productos y divisiones (simplificar antes de operar):

a) $\frac{9}{16}.\frac{25}{8}.\frac{4}{30}=$

b) $\left(-\frac{4}{5}\right).\frac{6}{7}.\frac{21}{36}=$

c) $\frac{42}{44}.\frac{55}{56}.\frac{24}{30}=$

d) $-\frac{26}{25}.\frac{15}{39}.\left(-\frac{35}{7}\right)=$

e) $-\frac{4}{9}.\frac{22}{28}.\frac{21}{32}.\left(-\frac{6}{11}\right)=$

f) $\frac{4}{7}:\frac{6}{28}=$

g) $\frac{25}{26} : \frac{5}{13} =$

h) $\frac{1}{3} : \left(-\frac{1}{3}\right) =$

i) $\frac{1}{3} : 3 =$

j) $-\frac{2}{5} : 1 =$

k) $1 : \left(-\frac{2}{5}\right) =$

l) $-\frac{9}{15} : \left(-\frac{6}{25}\right) =$

m) $-\frac{11}{16} : \frac{12}{22} =$

3) resolver las siguientes operaciones combinadas:

a) $\frac{1}{3} . \frac{3}{4} + \frac{1}{5} : \frac{3}{10} =$

b) $\left(\frac{1}{2} + \frac{5}{6}\right) : \frac{4}{3} - \frac{1}{5} =$

c) $\left(\frac{3}{2} + \frac{1}{4} . \frac{2}{5}\right) : \left[\left(3 + \frac{1}{4}\right) . \frac{16}{3}\right] =$

d) $\left[\left(\frac{1}{5} . \frac{3}{2} + \frac{5}{4}\right) - \left(\frac{14}{5} - \frac{3}{5} : \frac{4}{9}\right)\right] : \left(\frac{1}{3} + \frac{3}{13}\right) =$

e) $\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) - \frac{1}{6} : 2 =$

f) $\left(3 : \frac{6}{5} . \frac{2}{5} - 1\right) . \left(2 + \frac{1}{3} : 3\right) - 4 + \frac{6}{5} - \frac{11}{5} =$

g) $\left[1 : \left(2 - \frac{3}{2}\right) + 3 - \frac{5}{3}\right] : \frac{5}{3} . (-3) =$

h) $\left[-\frac{3}{5} - \left(-\frac{5}{3}\right)\right] . \left[-\frac{5}{3} + \left(-\frac{3}{5}\right)\right] : \left[-\frac{5}{3} - \left(-\frac{3}{5}\right)\right] =$

POTENCIACIÓN DE FRACCIONES

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

EJEMPLO:

$$\left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{2^2}{3^2} = \frac{4}{9}$$

EJERCICIOS

1) Calcular las siguientes potencias:

a) $\left(-\frac{1}{2}\right)^3 =$

b) $\left(-\frac{1}{2}\right)^4 =$

c) $\left(\frac{2}{3}\right)^3 =$

d) $\left(\frac{9}{5}\right)^2 =$

e) $\left(\frac{1}{2}\right)^6 =$

f) $\left(-\frac{1}{10}\right)^5 =$

g) $(-\frac{3}{5})^3 =$

h) $(-\frac{2}{3})^3 =$

i) $(\frac{16}{11} - 2)^2 =$

j) $(-1 - \frac{1}{4})^2 =$

k) $(\frac{1}{8} - 1)^2 =$

l) $(\frac{7}{9} - \frac{2}{3})^2 =$

m) $(\frac{3}{4} - 1)^3 =$

n) $(-\frac{2}{5} + 1)^3 =$

o) $(\frac{5}{2} - 2)^3 =$

p) $(-\frac{1}{5} + \frac{3}{10})^2 =$

RADICACIÓN DE FRACCIONES

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$$

EJEMPLO:

$$\sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{\sqrt{4}}{\sqrt{9}} = \frac{2}{3}$$

EJERCICIOS

2) Calcular las siguientes raíces:

a) $\sqrt[3]{-\frac{8}{27}} =$

b) $\sqrt{\frac{1}{25}} =$

c) $\sqrt{\frac{4}{100}} =$

d) $\sqrt[5]{-\frac{100.000}{32}} =$

e) $\sqrt[4]{\frac{16}{81}} =$

f) $\sqrt{\frac{25}{144}} =$

g) $\sqrt[3]{-\frac{1}{64}} =$

h) $\sqrt[3]{\frac{1}{8}} =$

i) $\sqrt[3]{-\frac{1}{27}} =$

j) $\sqrt{1 - \frac{5}{9}} =$

k) $\sqrt{1 - \frac{3}{4}} =$

l) $\sqrt{1 - \frac{16}{25}} =$

3) Realizar las siguientes operaciones:

a) $\sqrt[3]{-\frac{1}{8}} \cdot (-\frac{2}{3}) : \frac{5}{6} =$

b) $\sqrt{1-\frac{8}{9}} \cdot (-3)^2 + (\frac{1}{2})^2 : \frac{3}{2} =$

c) $(\frac{3}{2})^2 \cdot \frac{5}{9} + (-\frac{1}{2}) \cdot \frac{4}{3} - \sqrt[3]{-\frac{1}{64}} =$

d) $\sqrt{\frac{1}{16}} \cdot \sqrt[3]{-27} - (-\frac{2}{3}) =$

e) $(1-\frac{1}{2})^2 + \sqrt{(\frac{3}{5})^2 + (\frac{4}{5})^2} =$

4) Calcular el valor de X:

a) $X + \frac{1}{3} = 1$

b) $\frac{2}{3} + X = \frac{7}{9}$

c) $\frac{2}{3} X = -\frac{5}{6}$

d) $\frac{3}{2} X = -9$

e) $\frac{5}{6} - \frac{3}{2} X = 0$

f) $X : \left(-\frac{1}{3}\right) = -\frac{3}{2}$

g) $X + \frac{1}{3} X = 1$

h) $\frac{1}{2} X - X = (\frac{1}{2})^2 =$

i) $\frac{1}{3} X + \frac{1}{3} = X - \frac{1}{4}$

j) $\frac{3}{8} X + 1 = \frac{5}{3} X - 1$

k) $3X + \frac{1}{2} X = \sqrt{\frac{4}{25}}$

l) $\frac{1}{4} X + \frac{1}{3} = -2X + \frac{5}{7}$

m) $(1+\frac{1}{2})^3 = -\frac{1}{8}$

n) $(1-3X)^3 = -\frac{1}{5} + \frac{3}{40}$

o) $\frac{2}{3} + X^2 = \sqrt{\frac{49}{81}}$

p) $X + (\frac{1}{2} - 1)^2 + \sqrt[3]{-\frac{1}{125}} = 0$

5) Plantear y resolver:

a) Se necesitan 3 naranjas y 1/4 para obtener un vaso de jugo. ¿Cuántas naranjas se necesitarían para obtener 4 vasos de jugo?

b) Alicia desea repartir 5 kilos y 1/2 de frutas en 5 empaques plásticos iguales para conservarlas. ¿Cuántos kilos de fruta debe poner en cada recipiente?

c) Luis tenía un pedazo de cuerda de 5/8m de largo. La cortó en 4 pedazos iguales. ¿De qué medida es cada pedazo?

d) Compré una heladera por $7.500 María, mi vecina, quiere que se la venda. Yo acepto y el precio es 3/5 del precio de compra. ¿Cuánto me debe cancelar María?

e) En un jarrón hay rosas y claveles. Tres quintos de las flores son rosas y dos novenos de las rosas son blancas. ¿Qué fracción de las flores son claveles? y qué fracción de las flores son rosas blancas?

f) Después de vender los 3/5 de una pieza de tela quedan 40 metros ¿Cuánto era la longitud de la pieza?

g) Un recipiente está lleno 4/5 de su capacidad. Se saca la mitad del agua que contiene. ¿Qué fracción de la capacidad del recipiente se ha sacado? si la capacidad del recipiente es de 80l. ¿Cuántos litros quedan en el mismo?

h) Si a la tercera parte de un número le sumo su cuarta parte, da como resultado dicho número menos 11. ¿Qué número es?

i) Para preparar un pastel, se necesita:

j) 1/3 de un paquete de 750 g de azúcar, 3/4 de un paquete de harina de kilo, 3/5 de un pan de manteca de 200 g. Hallar, en gramos, las cantidades que se necesitan para preparar el pastel.

k) Un depósito contiene 150 l de agua. Se consumen los 2/5 de su contenido. ¿Cuántos litros de agua quedan?

l) Un cable de 72 m de longitud se corta en dos trozos. Uno tiene las 5/6 partes del cable. ¿Cuántos metros mide cada trozo?

m) Una caja contiene 60 bombones. Eva se comió 1/5 de los bombones y Ana 1/2.

¿Cuántos bombones se comieron Eva, y Ana?
¿Qué fracción de bombones se comieron entre las dos?

n) Ana ha recorrido 600 m, que son los 3/4 del camino de su casa a la escuela. ¿Qué distancia hay de su casa a la escuela?

o) Hace unos años Pedro tenía 24 años, que representan los 2/3 de su edad actual. ¿Qué edad tiene Pedro?

p) Un padre reparte entre sus hijos $1800. Al mayor le da 4/9 de esa cantidad, al mediano 1/3 y al menor el resto. ¿Qué cantidad recibió cada uno? ¿Qué fracción del dinero recibió el tercero?

q) Laura dispone de $ 300 para compras. El lunes gastó 2/5 de esa cantidad y el viernes los 3/4 de lo que le quedaba. ¿Cuánto gastó cada día y cuánto le queda al final?

RELACIÓN ENTRE ESCRITURA FRACCIONARIA Y ESCRITURA DECIMAL

Una fracción es una división entre dos números enteros, el resultado puede expresarse como un número entero (si la división es exacta), o se puede expresar como número decimal.

FRACCIONES DECIMALES

Son aquellas fracciones cuyo denominador es la unidad seguida de ceros (10, 100, 1.000, etc.)
Ejemplos:

$\frac{1}{10} = 0{,}1$ $\qquad \frac{2}{100} = 0{,}02$ $\qquad \frac{12}{10} = 1{,}2$ $\qquad \frac{123}{100} = 1{,}23$

Observen que la cantidad de cifras decimales es igual a la cantidad de ceros que hay en el denominador.

EJERCICIOS

1) Expresar las siguientes fracciones como número decimal:

a) $\frac{349}{1.000} =$ b) $\frac{2031}{10} =$ c) $-\frac{7}{100} =$ d) $\frac{520}{10.000} =$ e) $\frac{19}{10} =$

2) Escribir como fracción:

a) 0,37 = b) -64,5 = c) 1,1 = d) 40,89 = e) 3,0008 =

3) Representar en la recta numérica:

$\frac{2}{3}$ $\quad$ 0,5 $\quad$ 4,1 $\quad$ $\frac{7}{5}$ $\quad$ $-\frac{9}{2}$

EXPRESIONES DECIMALES

- FINITAS (CANTIDAD FIJA DE DECIMALES)
  La fracción que representa a una expresión decimal finita es la fracción decimal.
  Ej. 2,8 ; 3,68 ; 12,05 ;etc.

- PERIÓDICAS PURAS (INFINITAS CIFRAS DECIMALES)
  Ej. 3,888888888888888888 se escribe $3,\hat{8}$

  PARA EXPRESAR UN DECIMAL PERIÓDICO PURO COMO FRACCIÓN SE PROCEDE DE LA SIGUIENTE MANERA:

  1º) En el numerador de la fracción se escribe el número sin la coma y se le resta la parte del número no periódica.
  2º) En el denominador van tantos nueves como cifras decimales periódicas tenga el número.

  EJEMPLOS:
  1) $12,\hat{3} = \frac{123-12}{9} = \frac{111}{9} = \frac{17}{3}$

  2) $2,\widehat{04} = \frac{204-2}{99} = \frac{202}{99}$

- PERIÓDICAS MIXTAS (INFINITAS CIFRAS DECIMALES)
  Ej. 13,155555555555555 se escribe $13,1\hat{5}$

  PARA EXPRESAR UN DECIMAL PERIÓDICO MIXTO COMO FRACCIÓN SE PROCEDE DE LA SIGUIENTE MANERA:

  1º) En el numerador de la fracción se escribe el número sin la coma y se le resta la parte del número no periódica.
  2º) En el denominador van tantos nueves como cifras periódicas tenga el número y tantos ceros como cifras decimales no periódicas tenga el número.

  EJEMPLOS:
  1) $12,1\hat{3} = \frac{1213\text{-}121}{90} = \frac{1.092}{90}$

  2) $2,0\hat{4} = \frac{204\text{-}20}{90} = \frac{184}{90}$

  3) $0,52\hat{6} = \frac{526\text{-}52}{900} = \frac{174}{900} = \frac{29}{150}$

  EJERCICIOS:

1) Convertir en fracción y resolver:

a) $\left(0,\hat{5} - 1,\hat{2}\right) . 0,3 =$

b) $1,\hat{3} - 0,0\hat{6} - 0,\widehat{30} + \frac{2}{5} - \frac{4}{11} =$

c) $\left(0,25\text{-}1\right) :0,5+0,\hat{3} . (-3)^{2} + 1,\hat{4}=$

d) $\sqrt{\left(3,\hat{6}\text{-} 1,\hat{2}\right) :1,1\text{-}0,\hat{4}} =$

e) $\sqrt{-(4,\hat{9}\text{-} 1)^{2} + (0,\hat{9}+ 4)^{2}} + (2,\hat{3} - 1,\hat{2}) =$

f) $\left(3\text{-}2,8\right) :0,2^{2} - \frac{0,\hat{5}}{0,\hat{4}} =$

g) $6,0\hat{6} . \frac{9}{2} + \sqrt{0,0\hat{4} . 9,\hat{9}} =$

h) $0,00\hat{5} . 10^{2} - \sqrt{0,4 . 0,6+ 0.1^{2}} =$

i) $1,00\hat{3} . 8,\hat{9} :0,03=$

2) Calcular el valor de X:

a) $\frac{1,\hat{3} . X\text{-}0,\hat{3}}{2} + \sqrt[3]{- 1+ \frac{7}{8}} =2$

b) $\frac{X}{3} - 0,2\hat{3}=1,0\hat{8}\text{-} 0,0\hat{3}\text{-} 1$

c) $\frac{X+1,2}{2} + \left(2,2\text{-}0,4\right):\left(-0,3\right)=4$

d) $\frac{3X+1}{0,2} - 2,75 :0,5= -1,1$

e) $X+ \sqrt{0,01}\text{-} 1,24+2X=X\text{-}14,4+X$

f) $\frac{1,25X\text{-}0,\hat{1}}{0,0\hat{1}} + \frac{4,25}{\frac{1}{2}} = \frac{5}{18}$

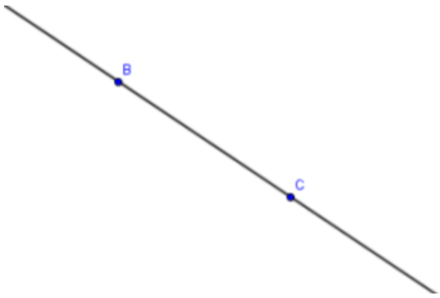
g) $\frac{1}{2} .\left(X\text{-}2\right)\text{-} 0,2 . \left(-X+3\right)= \frac{1}{2}+ 0,\hat{3} . (X+ \frac{1}{5})$

UNIDAD N° 5: GEOMETRÍA

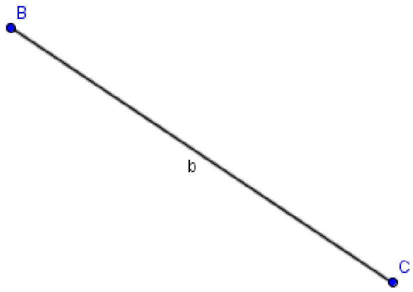
CIRCUNFERENCIA Y CÍRCULO.

Recordemos algunos conceptos fundamentales. Definíamos punto como la marca que deja una tiza sobre la superficie del pizarrón, o la huella del lápiz apoyado y sin moverlo en ningún sentido sobre el papel. Veremos en la próxima unidad que un punto puede quedar definido en un Sistema de Coordenadas Cartesianas como un par ordenado de valores.

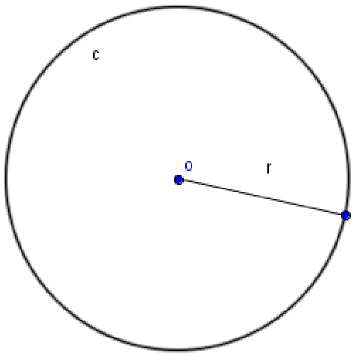
Sobre un plano dos puntos determinan una única recta que pasa sobre ellos. En el caso de la figura podemos observar la recta que pasa por los puntos B y C. Puede observarse que esta recta es única o que toda recta que pase por dichos puntos será idéntica a la dibujada.



Ahora bien dados dos puntos en el plano, se define al segmento como la intersección de dos semirrectas, en este caso semirrecta de origen ***C*** pasa por ***B (CB)*** intersección con la semirrecta de origen ***B*** que pasa por ***C (BC)***. El concepto es equivalente a una porción de recta comprendida entre dichos puntos ***B*** y ***C***. Observando el gráfico a continuación vemos el segmento ***b*** de extremos ***BC*** y al cual designaremos como ***b = BC***



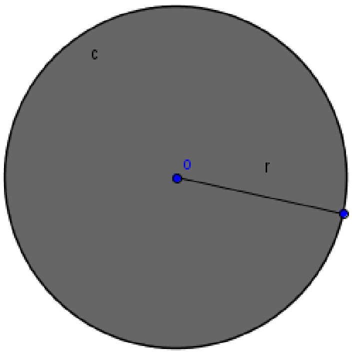
CIRCUNFERENCIA: Dado en el plano un punto ***o*** y una segmento determinado ***r***, al que llamaremos radio se define como circunferencia al conjunto de todos los puntos del plano que equidistan[1] del punto ***o*** con una longitud ***r***. en notación geométrica se define como ***c:(o,r)*** y se lee circunferencia ***c*** de centro ***o*** y radio ***r***.



[1] El concepto equidistan se refiere a puntos que están a la misma distancia.

Es muy importante tener en cuenta que la circunferencia es tan solo el conjunto de puntos que equidistan del punto ***o*** en una longitud ***r***, es decir no incluye los puntos que tienen una distancia menor a ***r*** y que podrían considerarse interiores a la circunferencia.

CIRCULO: Es el conjunto de todos los puntos interiores a una circunferencia. Habiendo dado esta definición podremos llegar a la conclusión que de una circunferencia tan solo podemos conocer su perímetro (longitud de su contorno) mientras que en un círculo podremos averiguar a más de su perímetro, podremos conocer su superficie o área.



CONSTRUCCIONES.

Para construir una circunferencia se debe emplear el instrumento llamado compás.

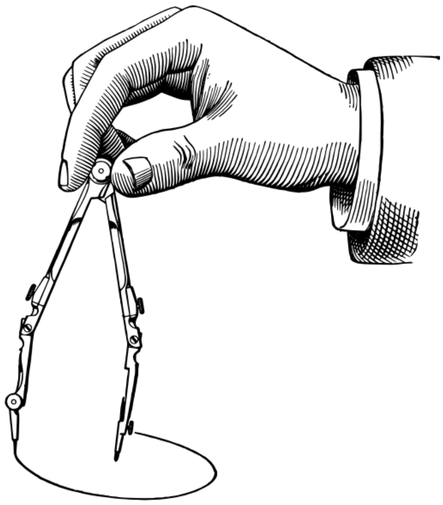


ILUSTRACIÓN 1: COMPAS - ARNAUD FABRE (WIKIMEDIA COMMONS)

Los datos que debemos conocer son el centro y la longitud de su radio, conocidos estos, centro y longitud de su radio podremos dibujar la circunferencia pinchando con el elemento punzante del compás en el centro habiéndole dado una abertura equivalente a la longitud de su radio. Por tanto es imprescindible contar con una regla que nos permita medir la abertura.

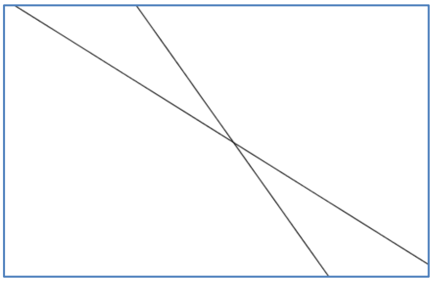
1. Define un punto cualquiera sobre la hoja. Con centro en dicho punto construye tres circunferencias con radios 3 cm, 5 cm y 6 cm respectivamente. Haz construido tres circunferencias concéntricas, dado que las tres tienen el mismo centro.
2. Dibuja un circunferencia de radio de 5 cm. Determina tres puntos cualquiera sobre la misma.
    a. Con centro en el primer punto construye una circunferencia de radio 3 cm.
    b. Con centro en el segundo punto construye una circunferencia de radio 5 cm.
    c. Con centro en el tercer punto construye una circunferencia de radio 7 cm.

  d. Observa la figura y anota tus observaciones. Haz construido circunferencias secantes dado que se cortan en dos puntos.

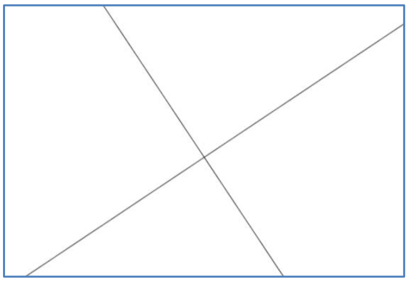
3. Construye una circunferencia de radio 7 cm.
   a. Con la misma medida de radio haz centro en un punto cualquiera de la misma y dibuja un arco de igual longitud al radio (7 cm) que corte a la circunferencia.
   b. Dibuja sucesivamente arcos similares al anterior haciendo centro en el último punto de corte dibujado.
   c. Se debieran completar tan solo 6 (seis) puntos. Une los puntos con regla. Debiera aparecer un hexágono regular.
4. Dibuja un segmento ***AB*** de 7 cm.
   a. Con centro en A dibuja una circunferencia de 3 cm.
   b. Con centro en B dibuja una circunferencia de 4 cm.
   c. Las circunferencias dibujadas debieran tocarse en un único punto. Estas circunferencias se llaman tangentes exteriores.
5. Se llaman circunferencias tangentes interiores aquellas que se tocan en un único punto pero uno de ellas es interior de la otra. Constrúyelas.

CLASIFICACIÓN Y CONSTRUCCIÓN DE ÁNGULOS.

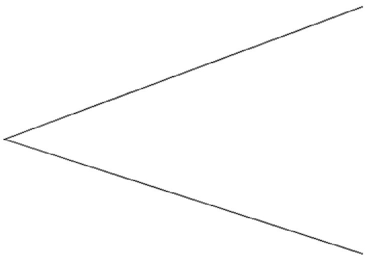
En geometría plana dos rectas al intersecarse determinan cuatro áreas diferenciadas a las cuales llamamos ángulos.



En el caso particular que las cuatro áreas sean exactamente iguales decimos que las rectas son perpendiculares y de esos ángulos decimos se llaman rectos.



También puede definirse ángulo como el sector de plano determinado por dos semirrectas no superpuestas con origen en un punto en común llamado vértice.



En el **sistema sexagesimal** de medición de ángulos, la unidad de medida es el **grado** que es la noventa ava parte de un ángulo recto, es decir que un ángulo recto tiene 90° (noventa grados). Dependiendo del nivel de precisión con el que se necesita realizar las mediciones, se define el **minuto** que sería la sesenta ava parte de un grado, y el **segundo** que vendría a ser la sesenta ava parte del minuto. En este caso sería que un grado tiene sesenta minutos y un minuto es equivalente a sesenta segundos.

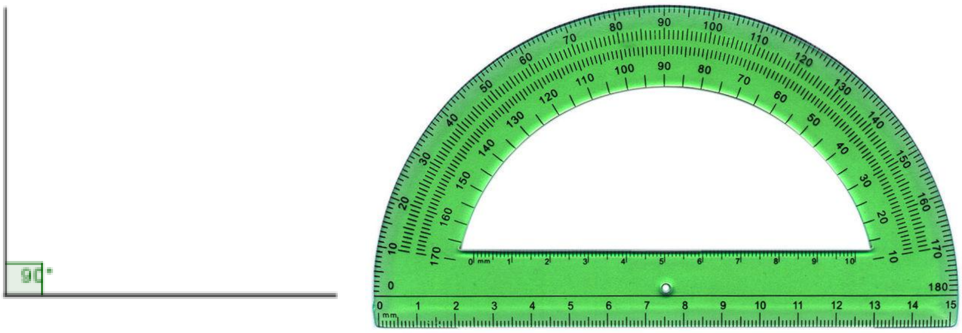


ILUSTRACIÓN 2 ANGULO RECTO Y TRANSPORTADOR AUTOR LUIGI CHIESA

El instrumento utilizado para realizar mediciones de ángulos es el de la figura en la ilustración llamado transportador, en la base inferior posee una regla milimetrada y sobre su arco una escala graduada en el sistema sexagesimal de medición de ángulos. El pequeño intersticio es para hacer coincidir el vértice del ángulo y se debe cuadrar la recta sobre uno de los lados.

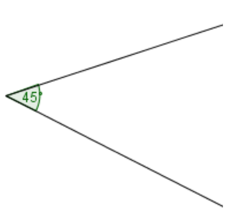
Los ángulos se clasifican según su amplitud, en relación a un ángulo recto del siguiente modo.

Ángulos agudos aquellos que son menores a un ángulo recto. (<90°)

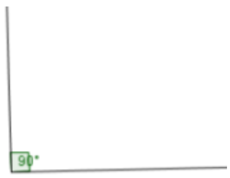
Angulo recto, el determinado por dos rectas perpendiculares.(=90°)

Angulo obtuso, aquellos que son mayores a un ángulo recto.(>90°)

Angulo llano, es equivalente a dos rectos (=180°)

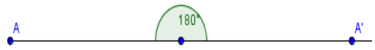


Angulo Agudo



Angulo Recto

Angulo Obtuso



Llano

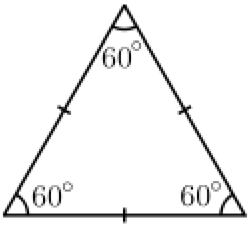
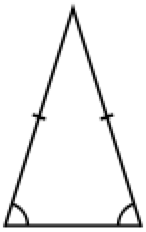
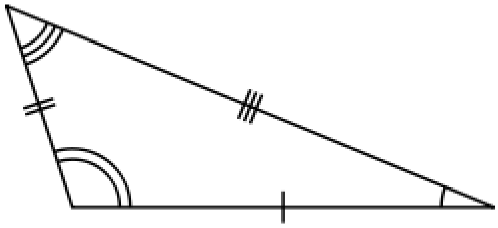
Actividades: Dibuja los siguientes ángulos en tu carpeta

a) 33°
b) 22°
c) 100°
d) 150°
e) 170°
f) 45°
g) 21°
h) 80°
i) 125°
j) 160°
k) 50°
l) 65°

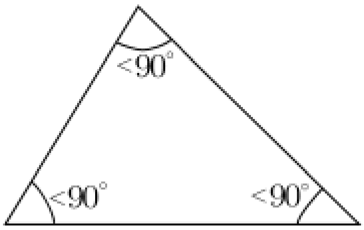
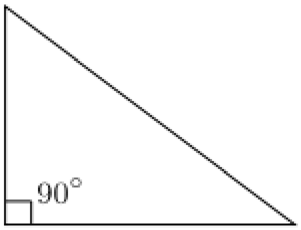
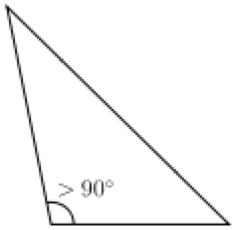
CLASIFICACIÓN DE TRIÁNGULOS SEGÚN SUS LADOS Y SUS ÁNGULOS.

Se define triángulo como el área común determinada por tres rectas que se cortan dos a dos. Los puntos donde las rectas se cortan determinan los vértices del triángulo, tienen en consecuencia tres lados, tres vértices y tres ángulos. Es un polígono de tres lados.

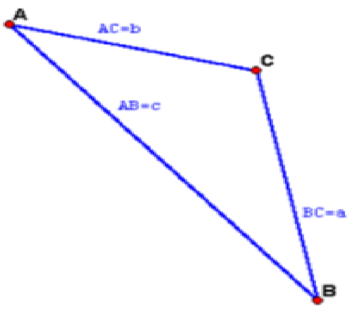
CLASIFICACIÓN SEGÚN SUS LADOS.

EQUILATERO	ISÓSCELES	ESCALENO
Sus tres lados son iguales. Todo triángulo equilátero es también isósceles.	Dos de sus lados son iguales.	Tiene sus tres lados desiguales.
		

CLASIFICACIÓN SEGÚN SUS ÁNGULOS.

ACUTÁNGULO	RECTÁNGULO	OBTUSÁNGULO
Tres ángulos agudos.	Un ángulo recto	Un ángulo obtuso
		

NOMENCLATURA DE LOS ELEMENTOS



Los vértices del triángulo se designan con letras mayúsculas, estos mismos nombres sirven para los ángulos. Los lados del triángulo se designan con el nombre del segmento determinado por los vértices que lo forman. También se usa una letra minúscula igual a la del ángulo al cual se opone.

Así por ejemplo el lado **b=AC** es el lado opuesto al ángulo **B**, el lado **a=BC** es el lado opuesto al ángulo **A** y el lado **c=AB** es opuesto al ángulo **C**.

CONSTRUCCIÓN DE TRIÁNGULOS CONOCIENDO DOS Y TRES ELEMENTOS.

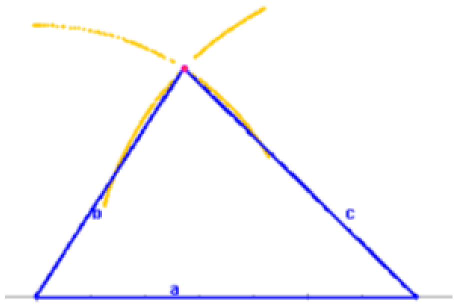
A los fines de la construcción de triángulos según los datos que se conocen del mismo se usará regla, compás y transportador.

PROPIEDADES:

a) La suma de los ángulos interiores de un triángulo es igual a dos rectos (180°)
b) Todo lado es menor que la suma de los otros dos.

CONSTRUCCIÓN DE UN TRIÁNGULO CONOCIENDO LOS TRES LADOS

Debe tenerse en cuenta la segunda propiedad y verificar si es posible la construcción, superado esto se procede a dibujar los lados sobre cada extremo, para esto se traza con el compás cada arco de acuerdo a las longitudes dadas, el punto de intersección de ambos arcos será el vértice restante del triángulo al cual luego unimos a los otros dos vértices.



Actividad: Dibuja en tu carpeta los siguientes triángulos siempre que sea posible:

a) Dos lados de 5 cm y uno de 6 cm.
b) Un lado de 4 cm, un lado de 5 cm y un lado de 6 cm.
c) Un lado de 3 cm, un lado de 2 cm y un lado de 8 cm.
d) Un lado de 4,5 cm, un lado de 5 cm y un lado de 8 cm.
e) Tres lados de 6 cm.
f) Tres lados de 2 cm.

CONSTRUCCIÓN CONOCIDOS DOS LADOS Y EL ÁNGULO COMPRENDIDO.

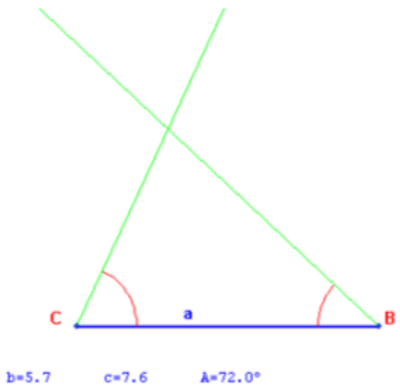
Es este caso se dibuja un lado conocido **(a)** y sobre este se traza el ángulo dado **(c),** sobre el extremo de este se traza el lado restante **(b)**, como los lados dibujados son de longitud conocida solo queda unir los extremos y queda determinado el tercer lado **(c=AB)**.

Actividades construye los siguientes triángulos.

a) Lados de 3 cm y 7 cm y ángulo comprendido de 45°
b) Lados 5 cm, 6 cm y ángulo comprendido 60°
c) Dos lados de 7 cm y ángulo comprendido de 120°
d) Lados de 3 cm, 6 cm y ángulo comprendido de 90°
e) Dos lados de 9 cm y ángulo comprendido de 75°
f) Dos lados de 10 cm y ángulo de 30°

CONSTRUCCIÓN CONOCIDO UN LADO Y DOS ÁNGULOS CONTIGUOS.

En este caso se dibuja el lado conocido y a sobre cada extremo se dibujan los ángulos los cuales naturalmente se unirán en un único punto que será el tercer vértice.



Actividades dibuja los siguientes triángulos cuando sea posible.

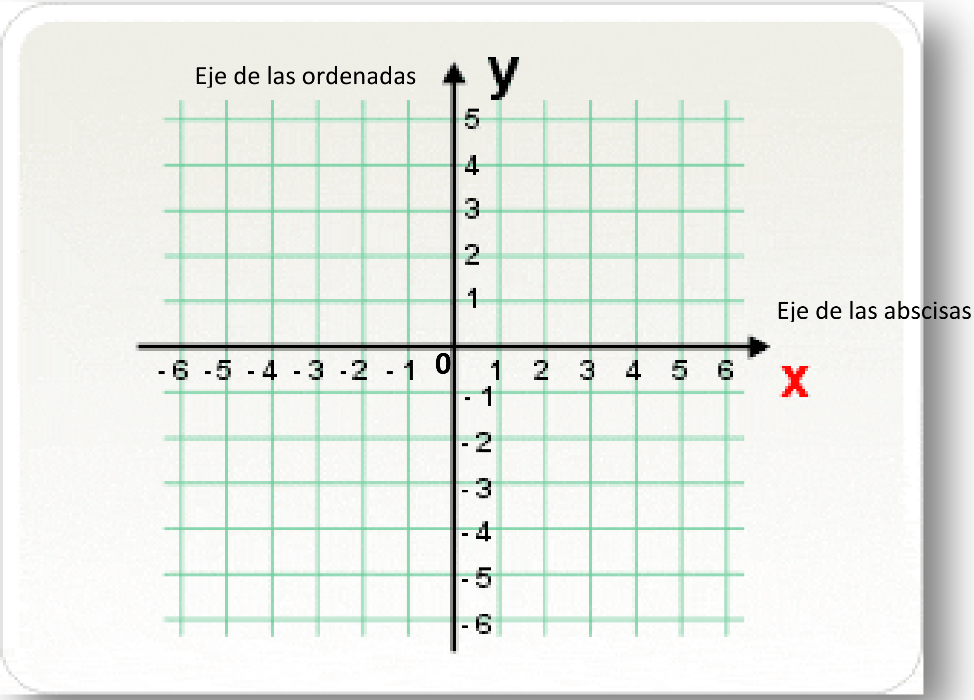
a) Dos ángulos de 50° y lado contiguo a ellos de 7 cm.
b) Angulo de 10°, ángulo de 60 ° y lado contiguo de 5 cm.
c) Triángulo equilátero de lado de 8 cm.
d) Angulos de 30°, 50 ° y lado contiguo de 6 cm.
e) Ángulos de 25°, 95° y lado contiguo de 10 cm.
f) Triángulo isósceles de lado desigual 8 cm.
g) Ángulos de 100°, 30° y lado contiguo de 4 cm.
h) Ángulos de 25°, 35° y lado contiguo de 9 cm.

UNIDAD N° 6: GRAFICOS CARTESIANOS Y FUNCIONES LINEALES

SISTEMAS DE COORDENADAS CARTESIANAS RECTANGULARES

En honor a rené descartes también llamado Cartesius, matemático y filósofo francés que vivió entre 1590 y 1650 es que hoy usamos el concepto de ejes de coordenadas cartesianas rectangulares. Descartes basaba su pensamiento filosófico en tomar *"un punto de partida"*.

Consiste en un sistema de ejes de coordenadas, uno horizontal al que se denomina eje de las ***abscisas***, normalmente asociado a la letra ***x*** y un eje vertical, al que se denomina eje de las ***ordenadas*** asociado generalmente a la letra ***y***. Observa el gráfico a continuación.



La intersección de los ejes representa el origen del sistema, es coincidente con el cero de ambos ejes, sería el ***"punto de partida"*** del sistema al cual hacía referencia descartes.

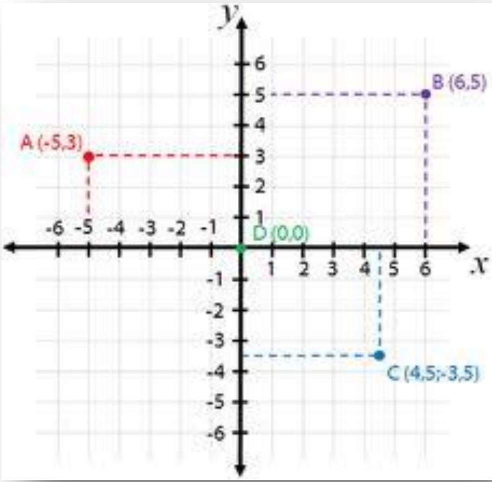
Sobre el eje horizontal hacia la derecha del eje de las ordenadas se representan los valores positivos en sentido creciente mientras que a la izquierda se representan los valores negativos en sentido decreciente. Entonces de izquierda a derecha se establece la relación de orden de menor a mayor en el eje horizontal.

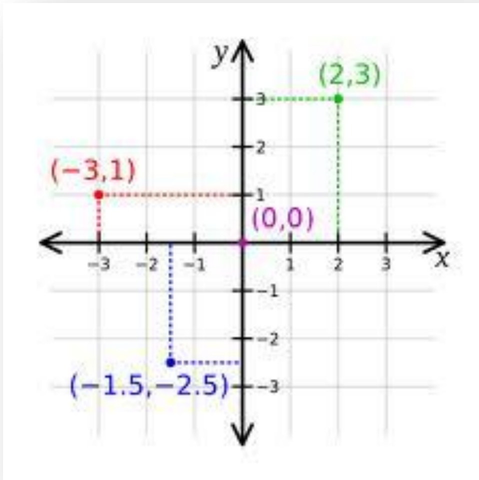
Sobre el eje vertical, por encima del eje horizontal se representan los valores positivos en sentido creciente, por debajo los valores negativos en sentido decreciente. En este caso la relación de orden de menor a mayor es desde abajo hacia arriba.

La utilidad está en la posibilidad de representar pares de valores de la forma ***(x ; y)*** donde el primer elemento del par es el valor correspondiente a ***x*** (***abscisa***) mientras que el segundo elemento del par es el valor correspondiente a ***y*** (ordenada).

Este concepto de pares de valores es lo que se conoce como par ordenado, el par ordenado (***x*** ; ***y***) es la forma general de representar cualquier par de valores y es fundamental el orden en que se indican siendo el primer elemento del par un valor correspondiente a la abscisa, y el segundo elemento un valor correspondiente a la ordenada .

A continuación hay dos gráficos con algunos pares ordenados representados. Obsérvalos como ejemplos para los ejercicios que vienen en seguida. Ten en cuenta que 4,5 es equivalente a 9/2; 3,5 es equivalente a 7/2, a los efectos de facilitar la tarea de graficar puedes convertir fracciones a decimales, o bien trabajar con escalas que dividan la unidad en tantas partes como indique el denominador de la fracción.





1. Realiza en tu carpeta la representación gráfica de los siguientes pares ordenados. Emplea un gráfico para cada una de las tres columnas.

a. (-2;-3)
b. (-3 ; 2)
c. (-5 ; -3)
d. (1; 3)
e. (3 ; -2)
f. (0 ; -3)
g. (2 ; 0)
h. (5 ; 0)

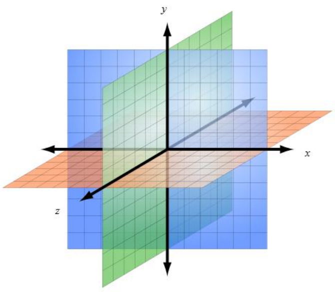
i. $\left(\frac{1}{4}\,;-\frac{3}{4}\right)$
j. $\left(\frac{3}{4}\,;-\frac{7}{4}\right)$
k. $\left(-\frac{7}{4}\,;\,0\right)$
l. $\left(0\,;-\frac{5}{4}\right)$
m. $\left(\frac{12}{4}\,;-\frac{16}{4}\right)$
n. $\left(\frac{9}{4}\,;-\frac{4}{4}\right)$
o. $\left(-\frac{12}{4}\,;-\frac{9}{4}\right)$

p. $\left(\frac{1}{3}\,;-\frac{2}{3}\right)$
q. $\left(\frac{11}{3}\,;-\frac{5}{3}\right)$
r. $\left(-\frac{9}{3}\,;\,\frac{6}{3}\right)$
s. $\left(0\,;\,\frac{7}{3}\right)$
t. $\left(-\frac{2}{3}\,;0\right)$
u. $\left(-\frac{4}{3}\,;-\frac{9}{3}\right)$
v. $\left(0\,;-\frac{7}{3}\right)$

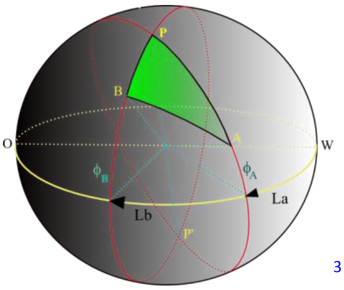
La representación gráfica por medio de pares ordenados tiene variadas aplicaciones. Por ejemplo en el antiguo juego del ajedrez donde las piezas se disponen sobre una cuadrícula de 8 filas por 8 columnas; quien no conoce el juego de la batalla naval, donde se disponen las naves sobre un sistema de coordenadas, en aplicaciones más corrientes cuando buscamos algún domicilio en guías o planos; en geografía se usa latitud y longitud con referencia al ecuador y el meridiano de Greenwich respectivamente para ubicar inequívocamente un lugar del planeta.

En síntesis, el sistema de coordenadas que hemos estudiado referido a dos ejes, nos sirve para identificar inequívocamente un punto en el plano. Definido un origen del sistema, cualquier punto del plano puede ser referenciado a través de sus coordenadas horizontal y vertical.

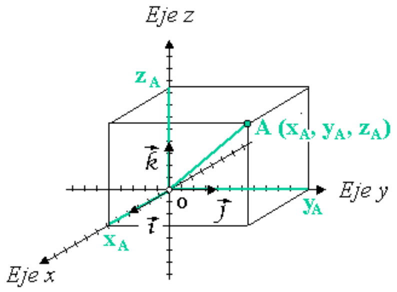
Con el único objeto que observes otros sistemas de coordenadas donde encontramos un tercer eje o dimensión es que incluimos las siguientes ilustraciones.



[2]



[3]



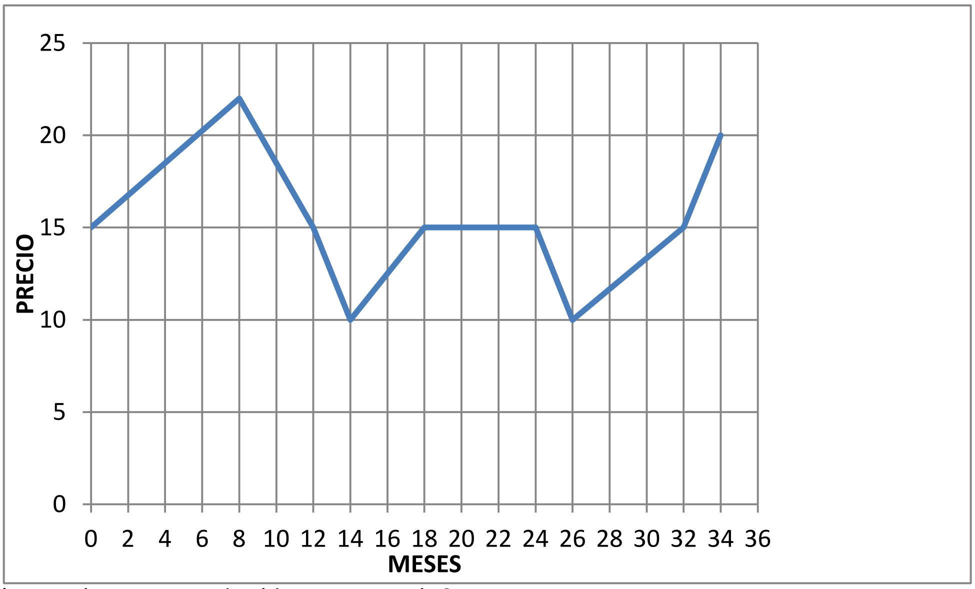
Sistema de Coordenadas Cartesianas Espaciales [4]

LECTURA E INTERPRETACIÓN DE GRÁFICOS:

En nuestra vida cotidiana vamos a encontrar reflejadas realidades de distintas actividades a través de gráficos. Si bien es cierto que no siempre estaremos interesados de tal o cual actividad, el poder interpretar la realidad reflejada por un gráfico puede sernos de mucha utilidad tanto a nosotros mismos como a nuestros allegados circunstanciales.

Veamos algunos ejemplos.

1. Una empresa construyó el siguiente gráfico que muestra la evolución del precio del kilo de kiwi.



a) ¿Cuánto tiempo duró la investigación?
b) ¿Cuál fue el precio del kiwi a los 12 meses de haber comenzado el estudio?
c) ¿En qué momento el precio fue de $15?
d) ¿En qué períodos el precio fue en aumento?
e) ¿Cuál fue el precio más alto que alcanzó el producto? ¿En qué momento ocurrió?
f) ¿Cuándo se dio el precio más bajo? ¿Cuál fue ese valor?

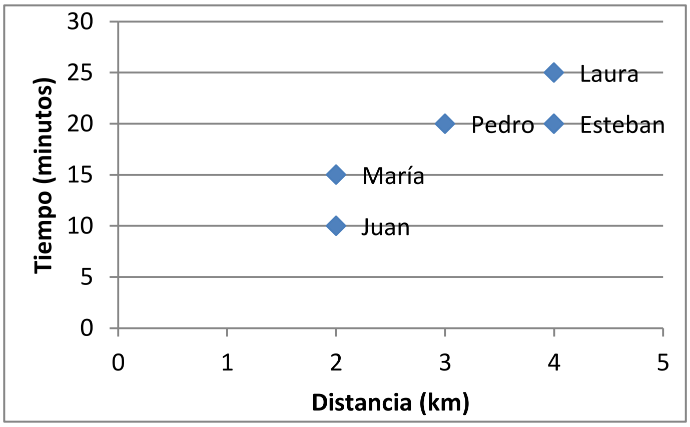
---

[2] Fuente : http://commons.wikimedia.org/wiki/User:Sakrambo
[3] Fuente: Archivo bajo la licencia [Creative Commons](#) [Genérica de Atribución/Compartir-Igual 3.0](#)
[4] Fuente: http://es.wikipedia.org/wiki/User:Willy

g) ¿Entre qué valores varió el precio durante la investigación?

h) Si el estudio comenzó en agosto de 2010, ¿Cuándo finalizó?

1) El gráfico siguiente muestra las distancias recorridas por un grupo de personas.



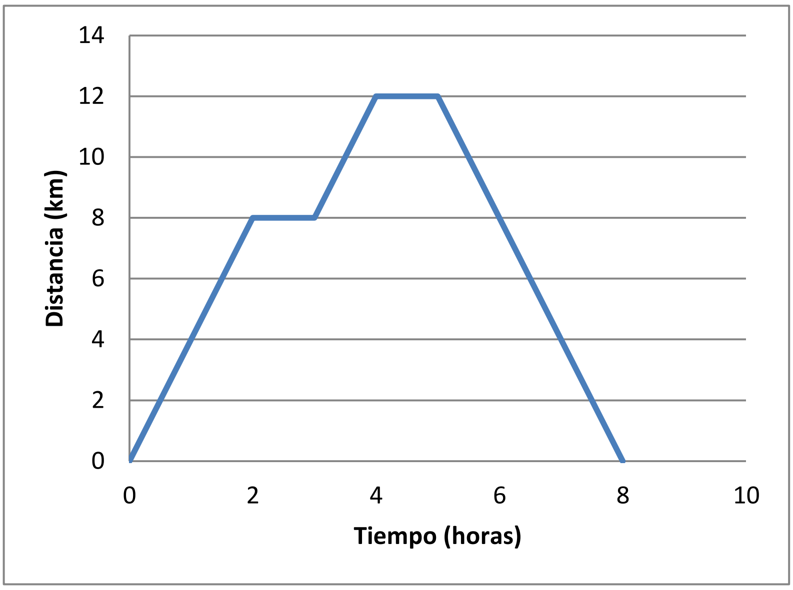
a) Escribir las coordenadas de los puntos.

b) ¿Qué pasa con los puntos que tienen igual la primera coordenada? ¿Qué significa?

c) ¿Qué pasa con los puntos que tienen igual la segunda coordenada? ¿Qué significa?

d) ¿Cuánto tardó cada uno y que distancia recorrió?

2) El gráfico siguiente muestra el recorrido de un grupo en una excursión.



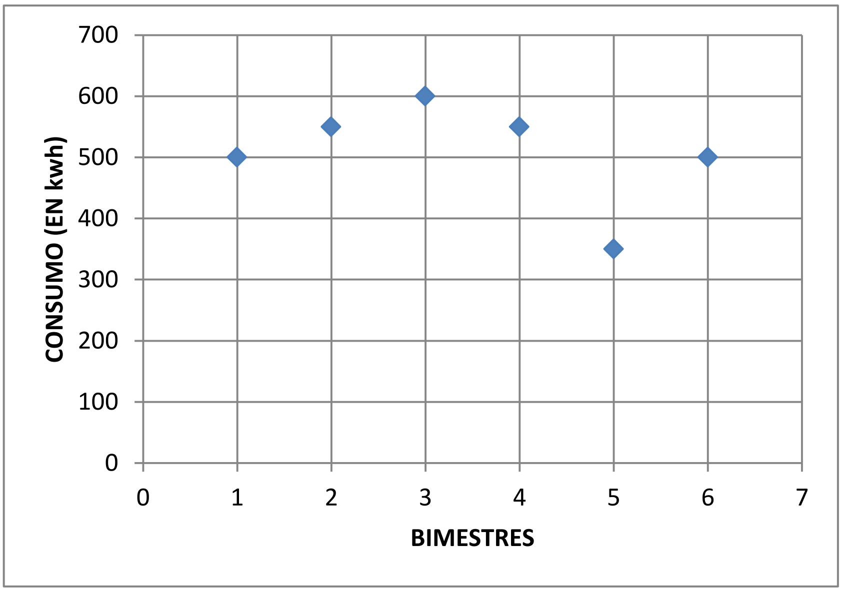
a) ¿Cuántas paradas hicieron y cuánto duró cada una?

b) ¿Cuánto tiempo duró en total la excursión?

c) Si salieron a las 10 de la mañana, ¿A qué hora regresaron?

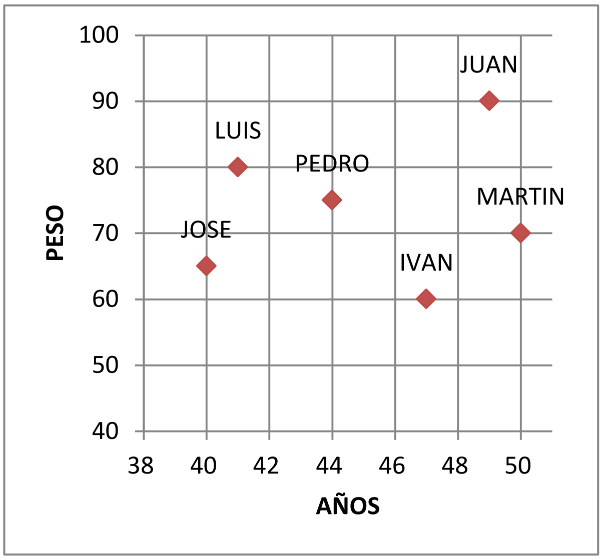
d) ¿A qué hora se detuvieron la segunda vez?

3) En la siguiente gráfica se muestra el consumo de luz de una familia durante un año.



a) ¿Cuál fue el período de mayor consumo y de cuánto fue?
b) ¿Cuál fue el período de menor consumo, de cuánto fue y a qué meses corresponde?
c) ¿Hubo períodos de igual consumo? Si la respuesta es afirmativa ¿En qué períodos ocurrió?

4) El gráfico que sigue muestra las edades y los pesos de un grupo de amigos.



a) ¿Cuál es la edad y el peso de Iván?
b) ¿Quién es el más pesado?
c) ¿Quién es el mayor de los amigos, cuántos años tiene?
d) ¿Cuántos años tiene Luis?
e) ¿Cuánto pesan Pedro y José?

FUNCIONES LINEALES O DE PRIMER GRADO:

El concepto de función lineal proviene del hecho que la representación gráfica resulta en una línea recta. También son de primer grado porque el exponente de la variable independiente es uno. Inmediatamente observamos la forma general.

$$y = ax + b$$

En ella ***y*** representa la variable dependiente, ***x*** la variable independiente, ***b*** recibe el nombre de termino independiente, ***a*** es el coeficiente del termino lineal o de primer grado. La única restricción es $a \neq 0$ esto es ***a*** debe ser distinto de cero, caso contrario anularía el termino lineal o de primer grado.

El concepto de variable independiente viene a significar que se le puede asignar cualquier valor real, es decir cualquier valor perteneciente al conjunto de los números reales ***r***. Por otra parte la variable dependiente recibe este nombre porque el valor que esta asuma depende de los valores que se asignen a la variable independiente.

Veamos algunos ejemplos de funciones lineales y el comportamiento de las variables

$Ejemplo\ 1)\ \ y = 3x + 1\ en\ este\ caso\ a = 3; b = 1$

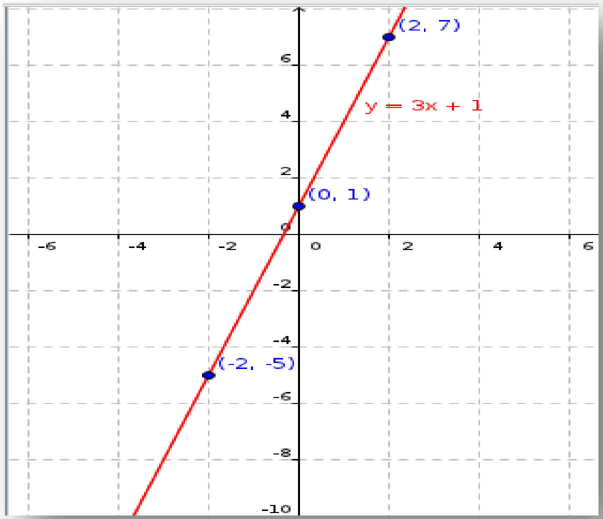
$a)\ si\ hacemos\ x = 2\ entonces\ y = 3.2 + 1\ luego\ y = 7$

$b)\ si\ hacemos\ x = 0\ entonces\ y = 3.0 + 1\ luego\ y = 1$

$c)\ si\ hacemos\ x = -2\ entonces\ y = 3.(-2) + 1\ luego\ y = -5$

Con los cálculos que hemos efectuados, podemos transcribir los valores de x e y a la siguiente tabla de valores. En la medida que vayamos ganando en agilidad para el cálculo podemos confeccionarla directamente. Finalmente podemos transcribir los valores al gráfico cartesiano como se observa en la figura a la derecha de la tabla.

X	Y
2	7
0	1
-2	-5



$Ejemplo\ 2)\ y = -2x - 3\ en\ este\ caso\ a = -2; b = -3$

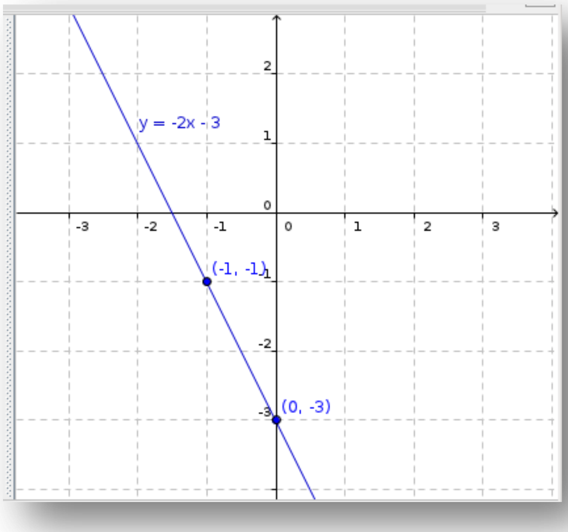
$a)\ si\ hacemos\ x = 0\ entonces\ y = -2.0 - 3\ luego\ y = -3$

$b)\ si\ hacemos\ x = 1\ entonces\ y = -2.1 - 3\ luego\ y = -5$

$c)\ si\ hacemos\ x = -1\ entonces\ y = -2.(-1) - 3\ luego\ y = -1$

Construimos tabla y gráfico.

X	Y
0	-3
1	-5
-1	-1



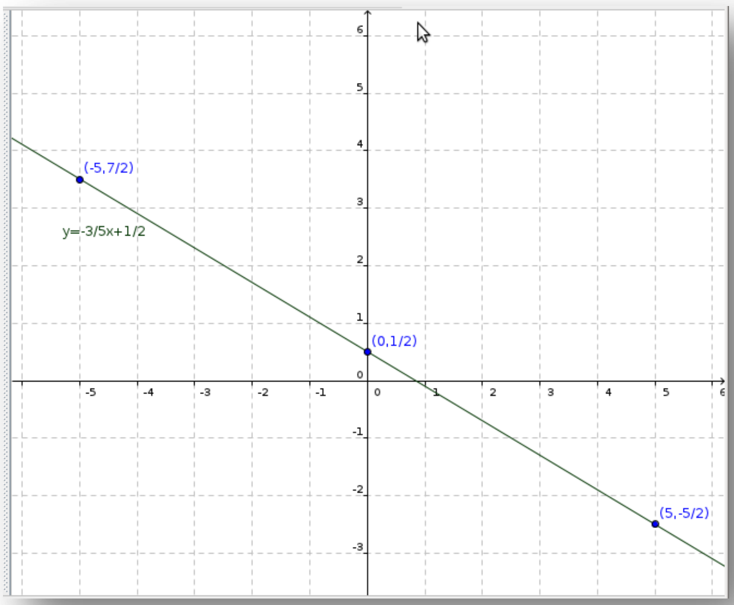
$$Ejemplo\ 3)\ y = -\frac{3}{5}x + \frac{1}{2}\ en\ este\ caso\ a = -\frac{3}{5}; b = \frac{1}{2}$$

$$a)\ si\ hacemos\ x = 0\ entonces\ y = -\frac{3}{5}.0 + \frac{1}{2}\ luego\ y = \frac{1}{2}$$

$$b)\ si\ hacemos\ x = 5\ entonces\ y = -\frac{3}{\cancel{5}}.\cancel{5} + \frac{1}{2}\ luego\ y = -3 + \frac{1}{2}\ finalmente\ y = -\frac{5}{2}$$

$$c)\ si\ hacemos\ x = -5\ entonces\ y = -\frac{3}{\cancel{5}}.(-\cancel{5}) + \frac{1}{2}\ luego\ y = 3 + \frac{1}{2}\ finalmente\ y = \frac{7}{2}$$

X	Y
0	1/2
5	-5/2
-5	3 ½



Observa que en el último ejemplo se eligieron los valores 0, 5 y -5, esto no es casual, el caso del cero anula el término de primer grado, por lo tanto el valor de *y* va a ser el valor de b, al elegir 5 y -5 también se hace con el sentido de simplificar los cálculos dado que ambos son múltiplos del denominador y por lo tanto simplificable con este. Esto garantiza que el término lineal será entero.

Cualquier otro valor que se le asigne a x, sea entero o racional, obtendrá su correspondiente valor en y, de lo cual resulta que todo punto va a estar alineado con los tres calculados. Esto es así dado que una recta queda definida por dos puntos en el plano, luego con dos pares ordenados calculados obtenemos dos puntos, sería suficiente, no obstante conviene calcular un tercero a manera de control de verificación de los cálculos. Si los tres puntos se encuentran alineados, los cálculos realizados son correctos, en caso contrario corresponde revisarlos.

Ejercicios:

Confecciona tabla y gráfico cartesiano de las siguientes funciones lineales.

a. $y = -\frac{1}{2}x - 3$
b. $y = -2x + 1$
c. $y = 3x - \frac{2}{3}$
d. $y = 5x + \frac{2}{3}$
e. $y = -5x + 2$
f. $y = x - \frac{3}{10}$
g. $y = -\frac{1}{10}x - \frac{7}{10}$
h. $y = \frac{3}{5}x - \frac{2}{5}$
i. $y = \frac{5}{3}x - \frac{2}{5}$
j. $y = 4x - \frac{5}{6}$
k. $y = -3x + \frac{2}{3}$
l. $y = \frac{1}{3}x - \frac{2}{3}$
m. $y = \frac{1}{3}x + 3$
n. $y = -5x + \frac{4}{3}$
o. $y = -3x - 3$
p. $y = -\frac{3}{5}x + \frac{4}{5}$
q. $y = \frac{3}{8}x + 4$

AUTORÍA, DERECHOS Y RESERVAS